



Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Elementær Teori for Plane Bjælker

Byskov, Esben

Publication date:
2005

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

Citation for published version (APA):

Byskov, E. (2005). *Elementær Teori for Plane Bjælker*. Department of Civil Engineering, Aalborg University. U : Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitet Nr. U0503

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at vbn@aub.aau.dk providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Elementær Teori for Plane Bjælker



Esben Byskov

Del I: Endimensionale Bjælker

Virtuelle Arbejders Principper

Små og Moderate Tøjninger

Elasticitet og Plasticitet

Del II: "Bjælker med Tværsnit"

Tværsnitskonstanter

Flydeled

Elasticitet og Plasticitet

Instituttet for Bygningsteknik
Aalborg Universitet
2005

Esben Byskov
Elementær Teori for Plane Bjælker
ISSN 1395-8232 U0503

Copyright © by Esben Byskov, 2005

Trykt på Uni-Print, Aalborg Universitet

Forord

Denne bog er skrevet med henblik på introduktion og benyttelse af de mest basale teorier for stænger og bjælker, hvor hovedvægten er lagt på retliniede, plane bjælker.

Bogens indhold dækker mere end et enkelt semesters pensum ved bygningsingeniøruddannelsen ved Aalborg Universitet. Ideen er, at de studerende herved får en samlet fremstilling, så teorierne på de forskellige semestre udledes på et fælles grundlag.

Indledningen til kapitlet om plasticitet skyldes i høj grad min broder Jes Christoffersen, hvis råd og indsigt i bærende konstruktioners teori altid er givende.

Jeg vil godt takke to meget dygtige ph.d.-studerende, nemlig Filip Westarp og Kim Dalsten Sørensen, for deres skarpe øjne og store indsats med at finde mine mange trykfejl.

Som sædvanlig har min kyndige sekretær Kirsten Aakjær også hjulpet mig med meget, blandt andet det sproglige.

For god ordens skyld nævner jeg, at jeg selv har skrevet al tekst og tegnet alle tegninger.

Esben Byskov
Jægersborg og Aalborg
4. september 2005

Indhold

Forord	3
Indledning	11
I Endimensional Teori — “Stænger og Bjælker Uden Tværsnit”	13
1 Indledende Statik for Stænger og Bjælker	15
1.1 Indledning	15
1.2 Stangdeformation	16
1.2.1 Indledende Overvejelser	16
1.2.2 Stangens Kinematiske Forhold	17
1.2.3 Stangens Statiske Forhold	18
1.2.4 Stangens Fysiske Forhold	19
1.2.5 Stangens Tre Feltbetingelser	19
1.2.6 Flytningsdifferentialligning for Lineærelastiske Stænger	19
1.2.7 Randværdiproblem for Stangen	20
Ex 1-1 Stang Belastet med en Jævnt Fordelt Last	20
1.3 Bjælke deformation	22
1.3.1 Indledende Overvejelser	22
1.3.2 Bjælkens Kinematiske Forhold	24
1.3.3 Bjælkens Statiske Forhold	25
1.3.4 Bjælkens Fysiske Forhold	27
1.3.5 Bjælkens Tre Feltbetingelser	27
1.3.6 Flytningsdifferentialligning for Lineærelastiske Bjælker	27
1.3.7 Randværdiproblem for Bjælken	28
Ex 1-2 Simpel, Indspændt-Fri Bjælke	28
1.3.8 Overgangsbetingelser — Kontinuitet	30
Ex 1-3 Overgangsbetingelser	30
Ex 1-4 Betingelser ved Mellemunderstøtning	35
1.3.8.1 Problemer med Overgangsbetingelser	37

1.4	Behovet for Tilnærmelsesløsninger	38
1.4.1	Indledende Overvejelser	38
	Ex 1-5 Stang med Lineært Varierende Aksialstivhed . . .	39
	Ex 1-5.1 Eksakt Løsning	39
	Ex 1-5.2 Regulær Perturbation	41
	Ex 1-5.3 Direkte Række	44
	Ex 1-5.4 Potentiel Energi Π_P	45
	Ex 1-5.4.1 Én Fjeder	46
	Ex 1-5.4.2 To Fjedre og et Åg	46
	Ex 1-5.4.3 Én Parameter	48
	Ex 1-5.4.4 To Parametre	49
	Ex 1-5.4.5 Flere Parametre	50
1.5	Afsluttende Bemærkninger Vedrørende Bjælketeorier	51
2	Virtuelle Arbejders Principper for Retliniede Bjælker	53
2.1	Indledning	53
2.2	De Virtuelle Flytningers Princip for Plane, Retliniede Bjælker . .	54
2.2.1	Timoshenkobjælker	55
2.2.2	Bernoulli-Euler Bjælker	57
2.2.3	Anvendelser af de Virtuelle Flytningers Princip for Bjælker	59
2.2.4	Statisk Bestemte Bjælker	60
	Ex 2-1 Bestemmelse af Snitkræfter ved de Virtuelle Flytningers Princip	60
	Ex 2-1.1 Bestemmelse af Forskydningskraft . . .	61
	Ex 2-1.2 Bestemmelse af Snitmoment	61
2.2.5	Eksempler på Tilnærmet Løsning ved de Virtuelle Flytningers Princip for en Lineærelastisk Bernoulli-Euler Bjælke .	62
	Ex 2-2 Bjælke med Punktlast	62
	Ex 2-2.1 Flytningsantagelse med Ét Led	63
	Ex 2-2.2 Forbedret Flytningsantagelse med Ét Led	65
	Ex 2-2.3 Flytningsantagelser med Flere Led . . .	65
	Ex 2-3 Bjælke med Trekantformet Last	66
2.3	De Virtuelle Kræfters Princip for Plane, Retliniede Bjælker . . .	66
2.3.1	Timoshenkobjælker	67
2.3.2	Bernoulli-Euler Bjælker	69
2.3.3	Anvendelser af de Virtuelle Kræfters Princip for Bjælker .	71
	Ex 2-4 Bestemmelse af Flytninger ved de Virtuelle Kræfters Princip	71
	Ex 2-4.1 Flytninger i en Statisk Bestemt Bernoulli-Euler Bjælke	71
	Ex 2-4.1.1 Bestemmelse af Tværbøjning	72
	Ex 2-4.1.2 Bestemmelse af Rotation . . .	73

Ex 2-4.2	Bestemmelse af Flytninger i en Statisk Ubestemt Bernoulli-Euler Bjælke	73
Ex 2-4.2.3	Bestemmelse af Tværuddøjning	74
Ex 2-4.2.4	Nyt Valg af Virtuelt Momentfelt	75
Ex 2-4.2.5	Bestemmelse af Rotation . .	76
2.4	Konklusion	76
3	Plasticitet for Bjælker og Rammer	77
3.1	Indledning	77
3.1.1	Lidt Historie	77
3.1.2	Plastiske Bjælker og Rammer	78
3.2	Indledende Eksempler	79
Ex 3-1	Simpelt Understøttet Bjælke	80
Ex 3-2	Eksempel: Indspændt-Simpelt Understøttet Bjælke	80
3.3	Øvre- og Nedreværdisætningerne, Extrema	83
3.3.1	Mekanismer, Mulige og Tilladelige Felter	83
3.3.2	Korrekt Flydemekanisme	84
3.3.3	Nedreværdi — Antaget Snitkraftfelt	84
3.3.4	Øvre værdi — Antaget Flydemekanisme	87
3.3.5	Øvre værdisætningen versus Nedreværdisætningen	89
3.4	Eksempler på Anvendelse af Øvre- og Nedreværdisætningerne	89
Ex 3-3	Statisk Ubestemt Bjælke med To Enkeltkræfter. .	89
Ex 3-3.1	Anvendelse af Øvre værdisætningen . . .	90
Ex 3-3.1.1	Første Skønnede Mekanisme	90
Ex 3-3.1.2	Anden Skønnede Mekanisme	90
Ex 3-3.1.3	Kontrol af Anden Skønnede Mekanisme	91
Ex 3-4	Statisk Ubestemt Bjælke med Fordelt Belastning	91
Ex 3-4.1	Anvendelse af Øvre- og Nedreværdisætningen	92
Ex 3-4.1.1	Første Skønnede Mekanisme	92
Ex 3-4.1.2	Anvendelse af Øvre værdisætningen	92
Ex 3-4.1.3	Kontrol af Første Skønnede Mekanisme	92
Ex 3-4.1.4	Anvendelse af Nedreværdisætningen	93
Ex 3-4.2	Anden Skønnede Mekanisme	93
Ex 3-4.2.5	Anvendelse af Øvre værdisætningen	94

	Ex 3-4.2.6 Kontrol af Anden Skønnede Mekanisme	94
	Ex 3-4.2.7 Anvendelse af Nedreværdisætningen på Anden Skønnede Mekanisme	95
	Ex 3-4.3 Korrekt Flydemekanisme	95
3.5	Flydelast af Rammer — Grundmekanismer	95
3.5.1	Etagemekanismer	96
3.5.2	Bjælkemekanismer	96
3.5.3	Knudemekanismer	97
3.6	Mekanismekombinationsmetoden	98
	Ex 3-5 Analyse af Ramme ved Mekanismekombinationsmetoden	99
	Ex 3-5.A Antal mulige flydeled	99
	Ex 3-5.B Grad af kinematisk overbestemthed	100
	Ex 3-5.C Antal uafhængige mekanismer	100
	Ex 3-5.D Analyse af de uafhængige mekanismer	101
	Ex 3-5.D-a Etagemekanisme	101
	Ex 3-5.D-b Knudemekanisme	101
	Ex 3-5.D-c Bjælkemekanisme	102
	Ex 3-5.E Kombinationer af de uafhængige mekanismer	102
	Ex 3-5.E-d Kombination af etage- og knudemekanisme	102
	Ex 3-5.E-e Kombination af bjælke- og knudemekanisme	103
	Ex 3-5.E-f Kombination af etage-, bjælke- og knudemekanisme	103
	Ex 3-5.F Bestemmelse af den mindste øvre værdi	104
	Ex 3-5.G Kontrol af at fysikken er overholdt	104
	Ex 3-5.H Konstatning af, at den mindste øvre værdi også hører til flydemekanismen	105
3.7	Udbøjning ved Flydebruddets Indtræden	105
	Ex 3-6 Benyttelse af de Virtuelle Kræfters Princip til Bestemmelse af Flytningerne ved Flydebruddets Indtræden	105
3.7.1	Korrekt Statisk System Umiddelbart før Flydebruddets Indtræden	106
3.7.2	Antaget Statisk System Umiddelbart før Flydebruddets Indtræden	107
3.8	Postulat med Hensyn til Sidst Dannet Flydeled	107
3.9	En Vinkeldrejningsformel	108
	Ex 3-7 Benyttelse af en Vinkeldrejningsformel til Bestemmelse af Flytningerne ved Flydebruddets Indtræden	109

Ex 3-7.1 Første Antagelse: Flydeleddet ved Indspændingen Dannes Sidst	110
Ex 3-7.2 Anden Antagelse: Flydeleddet Under Kraften Dannes Sidst	110
3.10 Bestemmelse af Udbøjning ved de Virtuelle Kræfters Princip Versus Benyttelse af en Vinkeldrejningsformel	111
4 Kinematisk Moderat Ulineær Teori for Retliniede Bjælker	113
4.1 Indledning	113
4.2 Aksialtøjningsmål for Kinematisk Moderat Ulineær Bjælke . . .	114
4.3 Variationer — Virtuelle Flytninger og Tøjninger	115
4.4 De Virtuelle Flytningers Princip for Kinematisk Moderat Ulineær Bjælke	117
4.5 Ligevægtsligninger for Kinematisk Moderat Ulineær Bjælke . . .	119
4.6 Flytningsdifferentialligninger	122
4.7 Resumé	123
4.7.1 Kinematik	123
4.7.2 Virtuelle Flytningers Princip	123
4.7.3 Ligevægtsligninger	123
4.7.4 Styrende Ligninger for Lineærelastiske Søjler	123
4.8 Eksempler på Søjlebuling	124
Ex 4-1 Eulersøjlen	124
Ex 4-2 Indspændt-Indspændt Søjle	127
Ex 4-3 Indspændt-Simpelt Understøttet Søjle	130
Ex 4-4 Indspændt-Fri Søjle	132

II Todimensional Teori — “Stænger og Bjælker Med Tværsnit” 135

5 Bøjning og Aksial Deformation af Lineærelastiske Tværsnit	137
5.1 Lineærelastisk Materiale	137
5.1.1 Formål	137
5.1.2 Bjælketværsnit og Bjælkefibre	138
5.1.3 Ren Aksialtøjning	139
5.1.4 Aksialtøjning og Krumningstøjning	140
5.1.5 Normalkraft, Nulte- og Førsteordens Momenter	142
5.1.6 Bøjningsmoment og Andensordens Momenter	143
5.1.7 Resumé af Konstitutive Relationer for Bjælker	143
5.1.8 Tværsnittets Akser — Bjælkeakse og Tyngdepunktslinie .	144
5.1.9 Bjælkeaksen i Tyngdepunktslinien	145
5.1.10 Resultaternes Uafhængighed af Bjælkeaksens Beliggenhed	145
5.1.11 Fordelingen af Aksialtøjning og Aksialspænding	148
5.1.12 Eksempler på Beregning af Inertimomenter	148

Ex 5-1	Rektangulært Bjælketværsnit	148
Ex 5-2	Cirkulært Bjælketværsnit	150
Ex 5-3	T-Formet Bjælketværsnit	151
Ex 5-4	Tyndfliget I -Formet Bjælketværsnit	152
Ex 5-5	Rørformet, Cirkulært Bjælketværsnit	154
6	Forskydningsspændinger i Bjælker	155
6.1	Hvad Er Forskydningsspændinger?	156
6.2	Formler for Forskydningsspændinger	156
6.2.1	Lidt Kontinuummekanik	157
6.2.2	Aksial og Transversal Ligevægt	159
6.2.3	Momentligevægt	161
6.2.4	Eksempler på Beregning af Forskydningsspændinger . . .	163
Ex 6-1	Rektangulært Bjælketværsnit	163
Ex 6-2	Cirkulært Bjælketværsnit	164
Ex 6-3	Tyndfliget I -Formet Bjælketværsnit	166
	Ex 6-3.1 Forskydningsspændinger i Kroppen . . .	166
	Ex 6-3.2 Forskydningsspændinger i Flangerne . .	168
Ex 6-4	Rørformet, Cirkulært Bjælketværsnit	170
7	Plastiske Tværsnit	173
7.1	Materialet	173
7.1.1	Indledende Overvejelser	173
7.1.2	Stift-Idealplastisk Materiale	174
7.2	Flydeled og Virtuelt Arbejde	175

Indledning

Modeller versus Virkelighed

Alle virkelige stænger og bjælker er naturligvis tredimensionale, men for at kunne beskrive deres opførsel på en relativt enkel måde modellerer man dem ofte som endimensionale legemer. Man taber selvsagt information ved at gå frem på denne måde, men langt over hundrede års erfaring viser, at man i mange tilfælde kan opnå tilstrækkeligt gode resultater, hvis man anvender en sådan enkel matematisk model. Denne bog beskæftiger sig med opstilling og anvendelse af et par af de mest sædvanlige teorier af denne type.

Bogens Opbygning

Opbygningen af bogen fremgår af indholdsfortegnelsen, men måske er et par ord om ideen bag den på sin plads.

I del I introduceres “stænger og bjælker uden tværsnit,” hvilket betyder, at stængerne og bjælkerne betragtes som endimensionale (orienterede) legemer, hvis tværsnitsegenskaber kendes ad anden vej.¹

Med hensyn til de *materialemodeller*, der introduceres, er de begrænset til de lineærelastiske, som får langt hovedparten af pladsen, og lineærelastisk-idealplastiske samt stift-idealplastiske modeller, der benyttes til bestemmelse af plastisk bæreevne af bjælker og rammer.

Både kinematisk lineære og kinematisk moderat ulineære teorier opstilles. De sidste i høj grad for at kunne behandle det vigtige problem med søjler, der buler.

Del II omhandler analyser af stang- og bjælketværsnit, hvor blandt andet formler for tværsnitskonstanter for forskellige lineærelastiske tværsnit opstilles. I forbindelse med de plastiske bjælkeproblemer analyseres de såkaldte flydede.

Bjælketeorier og Tværsnitsundersøgelser

Det er overordentlig vigtigt at holde emnerne bjælketeorier og tværsnitsundersøgelser skarpt adskilte — ellers får man meget nemt opstillet en ikke-konsistent teori. Fremgangsmåden bør være som følger. Man finder tværsnitskonstanterne ved en to- eller tredimensional betragtning og indfører dem i den endimensionale teori, man har valgt. Herefter udfører man stang- eller bjælkeanalysen som

¹Med hensyn til begreberne *endimensional* og *orienteret*, se afsnit 1.1.

rent endimensional. Når man så skal undersøge, om tværsnittene kan holde til påvirkningerne, går man tilbage til den to- eller tredimensionale teori.

Man må for eksempel ikke blande de to- og tredimensionale synsvinkler ind i opstillingen af et virtuelt arbejdes princip for en bjælke, idet man populært sagt har “klemte tykkelsen” ud af bjælken på dette stadi.

Virtuelle Arbejders Principers Centrale Rolle

Den helt centrale rolle, som indtages af forskellige virtuelle arbejders principper, betones kraftigt, og principperne udnyttes i adskillige sammenhænge.

Fysisk Intuition versus Stringens

I ældre lærebøger fremstår teorier for de bærende konstruktioner ofte — faktisk oftest — som en lang række af løsninger til problemer, der øjensynligt ikke har nogen indbyrdes relation. Dette skyldes formentlig, at mange forfattere ønskede at betone den fysiske intuition, der uden for enhver tvivl er central for en god beherskelse af emnet. I overensstemmelse med en mere moderne opfattelse har jeg valgt at opstille alle teorier og løsninger på så stringent et grundlag som muligt, hvorefter de tolkes fysisk. Den fysiske intuition spiller således stadig en central rolle, men den benyttes snarere til kontrol end som basis for opstillingen af teorierne.

Stil

Der er et par sider af den stil, jeg anvender, som kan fortjene et par ord med på vejen.

For det første er det meget vigtigt for mig ikke blot at beskrive, hvorledes man udleder forskellige formler. Efter min opfattelse er det endnu vigtigere at fortælle, hvorfor man udfører de forskellige manipulationer. Et eksempel på dette er afsnit 6.2, der i de fleste fremstillinger fremstår som en serie af geniale indfald, hvis logik end ikke antydes.² Sine steder forsøger jeg også at forklare, hvorfor man *ikke* gør det hele på en anden måde, hvilket kan være lige så vigtigt.

For det andet benytter jeg mig ofte af en blanding af uformelt og ret arkaisk sprog. Det er mit håb, at det uformelle ikke ødelægger præcisionen af fremstillingen, hvilket jeg lægger megen vægt på. Den undertiden lidt gammeldags udtryksmåde og benyttelse af ord og vendinger, der ikke er de mest gængse nutildags, skyldes, dels at jeg selv godt kan lide den slags udtryk, dels at de studerende — efter min mening — har godt af at stifte bekendtskab med sprog, der ikke er helt dagligdags. Man kan være uenig med mig, men det får så være.

Referencer

Som læseren meget hurtigt kan overbevise sig om, er der i nærværende udgave kun to referencer. Dette skyldes ganske enkelt, at der her er tale om en foreløbig udgave, og at jeg af hensyn til tiden har valgt at nedprioritere referencerne til fordel for det faglige indhold i bogen.

²I min sorte sjæl kan jeg have mange forfattere mistænkt for herved at prøve at dupere læseren eller måske selv ikke at have forstået logikken bag udledningerne.

Del I

Endimensional Teori

“Stænger og Bjælker Uden Tværsnit”

Kapitel 1

Indledende Statik for Stænger og Bjælker

1.1 Indledning

I dette kapitel vil de to enkleste tilfælde af deformation og ligevægt af endimensionale, orienterede legemer blive gennemgået — forhåbentligt på en måde, så de væsentligste facetter af emnerne fremgår på en naturlig måde.

Ved betegnelsen “endimensionalt legeme” vil vi forstå et legeme, hvis udstrækning i den ene retning er meget større end i de to andre som for eksempel en billardkø, en violinstreng, en lineal, osv. Med *orienteret* hentydes til, at bjælken ikke blot beskrives ved sin form, dvs. ved sine koordinater, men også ved en retning.¹

For ikke at komplicere problemerne, vil vi antage, at:²

- flytningerne er meget små i forhold til legemernes dimensioner,
- deformationerne, der beskriver, hvor hårdt legemerne er påvirket, er meget små, hvilket viser sig at medføre en forudsætning om, at de afledede af flytningerne er meget små,
- at materialerne er lineærelastiske,³ hvorved forstås, at der er en lineær

Endimensionale,
orienterede
legemer

Små flytninger
og
flytningsafledede

Lineær
elasticitet

¹Inden for et ganske andet felt, nemlig speedway, vil man nemt kunne se ideen med at beskrive et legeme ved mere end dets position. Hvis man ønsker en blot nogenlunde rimelig beskrivelse af en speedwaymotorcykel som et punktformet legeme, er man nødt til at involvere stedet og retningen af forhjulet, for, som enhver, der har set speedway, ved, peger forhjulet i svingene ikke fremad, men danner en — i øvrigt ganske stor — vinkel med cyklens bane. Man er derfor nødt til at have en ekstra variabel i beskrivelsen, nemlig forhjulets vinkel. Punktet, dvs. motorcyklen, er derfor beskrevet som et orienteret legeme.

²Over 90% af alle stang- og bjælkeberegninger foretages under disse forudsætninger.

³Vi skal senere i denne bog, se kapitel 3, udvide vort arbejdsområde til at gælde materialer, for hvilke der ikke kan forventes linearitet mellem deformation og kraftpåvirkning, idet vi især skal beskæftige os med materialer, der opfører sig *plastisk*.

sammenhæng mellem materialernes deformation og den til deformationen nødvendige kraft- eller momentpåvirkning.

I denne forbindelse benytter man betegnelsen *tøjning* om de (enheds)deformationer, materialerne undergår, se afsnittene 1.2 og 1.3, hvor begrebet tøjning bliver defineret for de omhandlede typer af legemer.

Det overordentlig vigtige *Virtuelt Arbejdes Princip*,⁴ som er helt centralt for de bærende konstruktioners teori, gennemgås i kapitel 2.

1.2 Stangdeformation

1.2.1 Indledende Overvejelser

Stangdeformation: Forlængelse eller forkortelse

Den første type deformation, vi vil beskæftige os med, er *stangdeformation*, hvorved forstås forlængelse eller forkortelse af et endimensionalt legeme, se Fig. 1-2.1, som illustrerer forlængelse af en tynd stang eller en tynd snor, som vi trækker i.

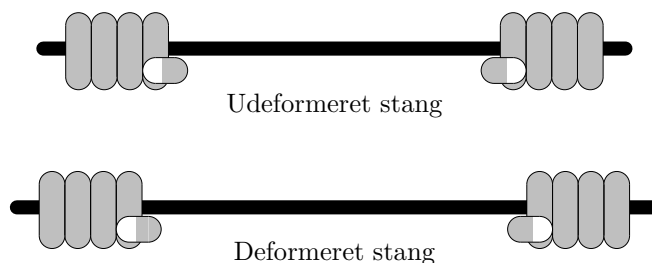


Fig. 1-2.1: Det “endimensionale” legeme — stangen — i udeformeret og deformeret tilstand.

I sandhedens interesse skal det bemærkes, at der skal overordentlig gode armkræfter til at deformere selv et meget slankt emne, så længdedeformationen kan ses, medmindre der er tale om en elastik eller et legeme, der er lavet af et andet meget fleksibelt materiale. Lad os antage, at vi er i stand til at præstere kraften

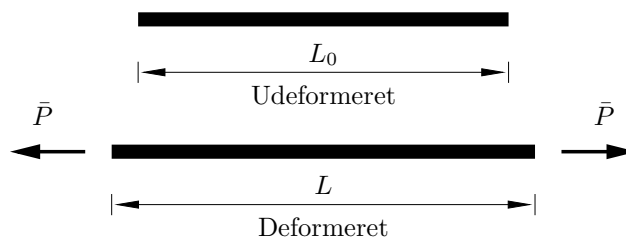


Fig. 1-2.2: Deformation og ligevægt af stang.

\bar{P} , hvor stregen over en størrelse her og i det følgende betyder, at størrelsen er

⁴I ældre litteratur kaldes *Virtuelt Arbejdes Princip* ofte for *Arbejdsligningen*, hvilket er helt misvisende, idet der ikke er tale om *reelle*, men netop *virtuelle* arbejder.

givet — foreskrevet. Når vi udsætter stangen for kraftpåvirkningen \bar{P} , vil den blive forlænget fra sin oprindelige længde L_0 til den endelige længde L . Det viser sig, at forlængelsen ΔL er ligefrem proportional med den påførte kraft \bar{P} og den oprindelige længde L_0 , medens den er omvendt proportional med stangmaterialets egen aksialstivhed EA , dvs. dets modstand mod at blive forlænget eller forkortet:

$$\Delta L = L - L_0 = \frac{\bar{P}L_0}{EA} \quad \text{eller} \quad \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\bar{P}}{EA} \quad (1.1)$$

For mange materialer kan man regne deres aksialstivhed EA lig med produktet af *elasticitetskoefficienten* E og stangens tværsnitsareal A , hvilket er grundelsen for, at materialestivheden angives ved en betegnelse på to bogstaver i stedet for ét.

Elasticitetskoefficient E
Tværsnitsareal A

1.2.2 Stangens Kinematiske Forhold

I eksemplet ovenfor er forholdene ens gennem stangen, og den relative længdeændring:

Relativ længdeændring

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0} \quad (1.2)$$

uændret, selv om vi for eksempel betragtede blot den halve stanglængde. Men hvis for eksempel tværsnitsarealet A ikke er konstant i hele stangens længde, vil den relative forlængelse afhænge af stedet på stangen, skønt alle tværsnit er påvirket af samme kraft \bar{P} . I så tilfælde er vi nødt til at betragte deformationen

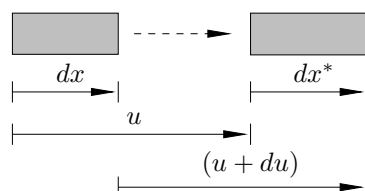


Fig. 1-2.3: Flytning og deformation af et infinitesimalt stangelement.

af et infinitesimalt stangelement, se Fig. 1-2.3, hvor dx betegner længden af det udeformerede stangelement, dx^* dets længde efter deformationen, hvor $u = u(x)$ er flytningen af venstre ende af stangelementet, og flytningen af højre ende er $(u + du)$. Man definerer *længdetøjningen*, også kaldet *aksialtøjningen*, ε ved:

$$\varepsilon = \frac{dx^* - dx}{dx} \quad (1.3)$$

Længdetøjning ε
=
Aksialtøjning ε

se Fig. 1-2.3. Det er formentlig ikke på forhånd indlysende, at vi ønsker at udtrykke alle størrelser ved hjælp af flytningen u og dens afledede, men det viser sig

at være en god ide. Derfor opstiller vi ved geometriske betragtninger i forbindelse med Fig. 1-2.3 følgende udtryk for længdetøjningen ε :

$$\varepsilon = \frac{(u + du) - u}{dx} \quad (1.4)$$

eller

$$\varepsilon(x) = u'(x) \quad \text{eller} \quad \varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} \quad (1.5)$$

hvor skrivemåden

$$(\cdot)' \equiv \frac{d(\cdot)}{dx} \quad (1.6)$$

Flytnings-tøjningsrelation \sim
Kinematisk
feltligning

er indført af bekvemmelighed. Udtrykket (1.5) kaldes stangens *flytnings-tøjningsrelation* og er den *kinematiske*⁵ *feltligning for stangen*. Flytnings-tøjningsrelationer optræder sædvanligvis i form af differentialligninger.

1.2.3 Stangens Statiske Forhold

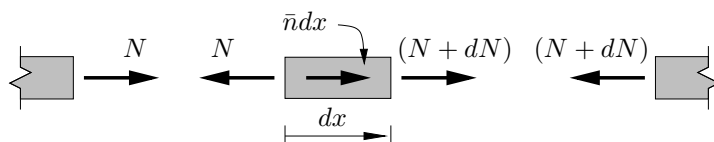


Fig. 1-2.4: Ligevægt af et infinitesimale stangelement.

Som nævnt ovenfor er det for det netop gennemgåede eksemplens vedkommende vist ret klart, at hvis vi snitter stangen over et vilkårligt sted, må vi til opretholdelse af ligevægten altid påføre snitfladerne en kraft af størrelsen \bar{P} . Der er her tale om en indre kraftstørrelse, en *snitkraft*, der for stangens vedkommende kaldes *normalkraften* eller *aksialkraften*, og som sædvanligvis betegnes $N(x)$. Antager vi nu, at stangen er belastet i sin længderetning med en fordelt belastning, hvis intensitet er $\bar{n}(x)$ pr. længde, vil normalkraften afhænge af, hvor på stangen man snitter over. Derfor betragter vi ligevægt af det infinitesimale stangelement af længden dx , som er vist på Fig. 1-2.4. Herved findes:

Aksialkraft \sim
Normalkraft N

$$-N(x) + \bar{n}(x)dx + (N(x) + dN(x)) = 0 \quad (1.7)$$

som omskrives til *ligevægtsligningen* for det infinitesimale stangelement, hvilket er stangens *statistiske feltligning*, som normalt er givet som en *statisk differentialligning*:

Statisk differentialligning \sim
Statisk
feltligning

$$\frac{dN(x)}{dx} + \bar{n}(x) = 0 \quad \text{eller} \quad N'(x) + \bar{n}(x) = 0 \quad (1.8)$$

⁵I en del — især ældre — litteratur benyttes betegnelsen *geometrisk* i stedet for *kinematisk*, hvilket kan lede til forskellige misforståelser, især ved kinematisk ulineære problemer.

1.2.4 Stangens Fysiske Forhold

For lineærelastiske materialer gælder den *fysiske betingelse*, som også benævnes den *konstitutive betingelse*:

Lineærelastisk materiale

$$N(x) = EA(x)\varepsilon(x) \quad (1.9)$$

hvor alle størrelser, som angivet, generelt set afhænger af stedet på stangen, Udtrykket (1.9) siger blot, at en dobbelt så stor kraft medfører en dobbelt så stor forlængelse.

1.2.5 Stangens Tre Feltbetingelser

Vi har nu opstillet de tre betingelser, som tilsammen danner grundlaget for løsning af ethvert stangproblem af den type, vi betragter her, nemlig problemer med små flytningsafledede og med lineærelastisk materialeopførsel:

Stangens tre feltbetingelser

1. Den *kinematiske feltbetingelse* (1.5):

$$\varepsilon(x) = u'(x),$$

2. den *statiske feltbetingelse* (1.8):

$$N'(x) + \bar{n}(x) = 0,$$

3. den *fysiske feltbetingelse* (1.9):

$$N(x) = EA(x)\varepsilon(x).$$

Det er værd at mærke sig, at kun den fysiske betingelse afhænger af materialet, medens de to andre er gyldige for *alle* materialer. Dette forhold skal vi imidlertid ikke komme nærmere ind på i nærværende sammenhæng.

1.2.6 Flytningsdifferentialligning for Lineærelastiske Stænger

Nu er vi i stand til at formulere en differentialligning, der sammenknytter flytningen $u(x)$ med belastningen $\bar{n}(x)$ og dens materialeegenskaber givet ved $EA(x)$. Når afhængigheden af længdekoordinaten x ikke angives, kan vi ved differentiation af den fysiske betingelse (1.9), hvori den kinematiske betingelse (1.5) er indsat, finde:

$$N' = (EAu')' \quad \text{eller} \quad \frac{dN}{dx} = \frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) \quad (1.10)$$

hvorefter (1.8) og (1.10) kan kombineres til:

$$(EAu')' + \bar{n} = 0 \quad \text{eller} \quad \frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) + \bar{n} = 0 \quad (1.11)$$

som er den differentialligning, vi vil beskæftige os med i det følgende.

For det meget vigtige specialtilfælde $EA = \text{const.}$ bliver (1.11):

Flytningsdifferentialligning for stang

$$\text{For } EA = \text{const.:} \quad u'' = -\frac{\bar{n}}{EA} \quad \text{eller} \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = -\frac{\bar{n}}{EA} \quad (1.12)$$

Andenordens differential-
ligning
⇒ To
randbetingelser

Mindst én
kinematisk
randbetingelse

1.2.7 Randværdiproblem for Stangen

Da differentialligningen (1.11) eller (1.12) er af anden orden, skal der benyttes to randbetingelser til fastlæggelse af den fuldstændige løsning til et stangdeformationsproblem. Disse randbetingelser kan enten være *kinematiske* eller *statiske*, hvor de første slags er udtrykt alene ved randværdier af u , medens de andre, som egentlig angiver randværdier af normalkraften N , omformuleres, så de udtrykkes ved den første afledede u' af u .

Det er meget vigtigt at mærke sig, at der for et vilkårligt stangproblem altid er netop én randbetingelse i hver ende, enten en kinematisk eller en statisk, hvoraf mindst én er kinematisk.⁶

Tilsammen danner differentialligningen og randbetingelserne et *randværdiproblem*.

Ex 1-1 Stang Belastet med en Jævnt Fordelt Last

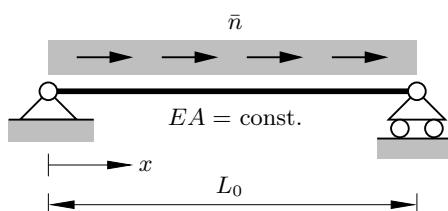


Fig. Ex. 1-1.1: Eksempel på en belastet stang.

Lad os betragte et ret simpelt stangeeksempel, se Fig. Ex. 1-1.1. Stangens stivhedsegenskaber er uafhængige af længdekoordinaten x . Stangen er belastet af den konstante last \bar{n} i sin længderetning. Differentialligningen (1.11) eller (1.12) bliver derfor i dette tilfælde:

$$u'' = -\frac{\bar{n}}{EA}, \quad \bar{n} = \text{const.} \quad \text{eller} \quad \frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{\bar{n}}{EA}, \quad \bar{n} = \text{const.} \quad (\text{Ex. 1-1.1})$$

med den generelle løsning:

$$u = -\frac{\bar{n}x^2}{2EA} + C_1x + C_0 \quad (\text{Ex. 1-1.2})$$

hvor C_0 og C_1 er integrationskonstanter, der bestemmes ved randbetingelserne, som opstilles i det følgende. Stangen er forhindret i at flytte sig ved

⁶De kinematiske randbetingelser kaldes undertiden på engelsk *the essential boundary conditions*, og de statiske randbetingelser kaldes *the natural boundary conditions*. Man kan undre sig over disse betegnelser, men de er altså gængse i engelsksproget matematisk litteratur, og der findes helt tilsvarende betegnelser på tysk. Når de kinematiske randbetingelser betegnes som de væsentlige, skyldes det utvivlsomt, at det er nødvendigt med mindst én kinematisk randbetingelse for at få fastlagt en entydig løsning. For en stangs vedkommende vil det sige, at hvis den ikke er fastholdt mod flytning i den ene ende, vil den kunne flyttes i sin egen retning uden anvendelse af kraft, hvorved flytningerne ikke er entydigt bestemt, skønt normalkraften kan være det.

$x = 0$, medens den frit kan bevæge sig i sin egen retning ved $x = L_0$. Den første randbetingelse, som er kinematisk, bliver derved:

$$u(0) = 0 \implies C_0 = 0 \quad (\text{Ex. 1-1.3})$$

medens den anden, som er statisk, er:

$$N(L_0) = 0 \quad (\text{Ex. 1-1.4})$$

Som det ses, er (Ex. 1-1.4) ikke direkte udtrykt ved u , som er den ubekendte i differentialligningen (Ex. 1-1.1), hvorfor vi er nødt til at omskrive (Ex. 1-1.4) ved hjælp af den kinematiske betingelse (1.5) i forbindelse med den fysiske betingelse (1.9). Herved fås:

$$u'(L_0) = 0 \quad \text{eller} \quad \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=L_0} = 0 \quad (\text{Ex. 1-1.5})$$

Ved differentiation af (Ex. 1-1.2) findes:

$$u' = \frac{du}{dx} = -\frac{\bar{n}x}{EA} + C_1 \quad (\text{Ex. 1-1.6})$$

og derfor:

$$-\left. \frac{\bar{n}x}{EA} \right|_{x=L_0} + C_1 = 0 \implies C_1 = +\frac{\bar{n}L_0}{EA} \quad (\text{Ex. 1-1.7})$$

hvorfor løsningen er:

$$u = -\frac{\bar{n}x^2}{2EA} + \frac{\bar{n}xL_0}{EA} \quad (\text{Ex. 1-1.8})$$

som omskrives til den mere bekvemme form:

$$u = -\frac{\bar{n}L_0^2}{EA} \left(\left(\frac{x}{L_0} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L_0} \right)^2 \right) \quad (\text{Ex. 1-1.9})$$

Ved differentiation af (Ex. 1-1.9) findes:

$$u'(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{\bar{n}L_0}{EA} \left(1 - \left(\frac{x}{L_0} \right) \right) \quad (\text{Ex. 1-1.10})$$

som ved benyttelse af den fysiske betingelse (1.9) og den kinematiske betingelse (1.5) giver:

$$N(x) = \bar{n}L_0 \left(1 - \left(\frac{x}{L_0} \right) \right) \quad (\text{Ex. 1-1.11})$$

Ved at sætte $x = 0$ i (Ex. 1-1.11) findes normalkraften ved $x = 0$:

$$N(0) = \bar{n}L_0 \quad (\text{Ex. 1-1.12})$$

hvilket var at forvente, idet (Ex. 1-1.12) udsiger, at hele den aksiale belastning $\bar{n}L_0$ skal bæres af understøtningen ved $x = 0$.

1.3 Bjælke deformation

1.3.1 Indledende Overvejelser

Den anden, helt basale form for deformation af “endimensionale” legemer, er bjælkebøjning. Vi vil her demonstrere fænomenet ved hjælp af en bøjelig plast-lineal eller et andet fleksibelt, tyndt emne, som vi holder i strakt arm, se Fig. 1-3.5.



Fig. 1-3.5: Linealen (bjælken) før vi bøjer den.

Moment

Først skal vi imidlertid have indført det vigtige begreb *Moment*. Medens de fleste formentlig vil have en god fornemmelse af *kræfter*, viser det sig, at *momenter*, der ikke optræder i form af $\text{kræft} \times \text{arm}$, er mere abstrakte.⁷ Fig. 1-3.6 viser to cirkelformede legemer, der langs periferien er belastet med fordelte

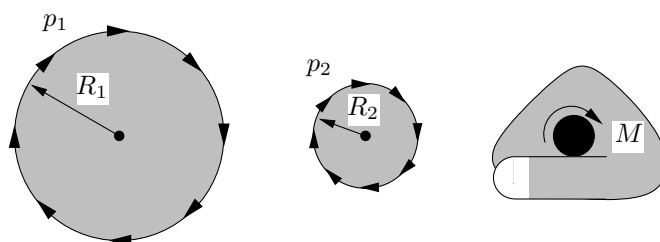


Fig. 1-3.6: Indførelse af begrebet moment.

kræfter p_1 henholdsvis p_2 , så det resulterende moment af disse kræfter i begge tilfælde er det samme, nemlig det resulterende moment M :

$$M = \int_0^{2\pi} R_1 p_1 d\theta = \int_0^{2\pi} R_2 p_2 d\theta \quad (1.13)$$

Man kan nu forestille sig, at vi lader radien gå mod 0, men bibeholder værdien af integralet i (1.13), så det altid er lig med M . Herved er der introduceret et moment uden en tilhørende arm eller kraft. Med lidt god vilje kan man tænke på et sådant moment som det, man påfører gashåndtaget på en motorcykel, se Fig. 1-3.6.

Nu vil vi rotere armene, så hænderne danner en lille vinkel i forhold til hinanden, se Fig. 1-3.7. Herved er bjælken (linealen) blevet deformeret, så den er gået fra den retliniede form til at følge en cirkel.

⁷Man bør faktisk beregne et moment som $\text{arm} \times \text{kræft}$, hvis man regner vektorielt, men det er en anden historie.



Fig. 1-3.7: Linealen (bjælken) efter vi har bøjet den.

Vi har selvfølgelig ikke kunnet deformere bjælken uden at have ydet en indsats, som i dette tilfælde består i, at vi har påført bjælken et *bøjningsmoment* \bar{C} ,⁸ se Fig. 1-3.8, som er lige så stort som det *vridningsmoment*, der er i vore arme.

Hvis vi har været meget omhyggelige, vil momentet \bar{C} være den eneste “kraftstørrelse,” vi har udsat bjælken for. Hvis det er tilfældet, vil vi kunne konstatere, at bjælken er deformeret, så den følger en cirkel med radius R , der afhænger af

Påført bøjningsmoment \bar{C}

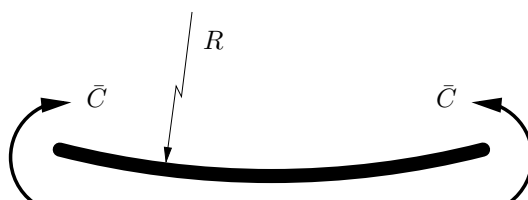


Fig. 1-3.8: Den bøjede bjælke med påført moment \bar{C} .

størrelsen af det påførte moment \bar{C} . Vi kan stille os et lidt omvendt spørgsmål: hvor stort et moment \bar{C} skal der til for, at bjælken netop får radien R , når længden af bjælken er L . Svaret kan nok umiddelbart synes unaturligt, idet momentet er *uafhængigt* af bjælkelængden. Som et lidt heuristisk argument kan benyttes, at for en kortere bjælke vil den vinkel, bjælken skal bøjes for at opnå radien R , være mindre, hvorfor det påførte moment \bar{C} også vil være mindre. At disse effekter netop balancerer, er hermed ikke bevist, men måske i nogen grad sandsynliggjort.

I forbindelse med teori for bøjning af bjælker er det ikke radien, men derimod *krumningstøjningen* $\kappa = 1/R$, der benyttes som et mål for bjælkens deformation. I denne forbindelse indføres *snitmomentet* M , som for lineærelastiske bjælker kan findes ud fra krumningstøjningen, ved:

$$M(x) = EI(x)\kappa(x) \quad (1.14)$$

hvor *bøjningsstivheden* EI er et udtryk for bjælkens modstand mod at blive bøjningsdeformeret — jo større EI , desto større moment yder bjælken for en given krumningstøjning. Også her kan det synes underligt at indføre en betegnelse bestående af to bogstaver i stedet for ét, men det skyldes — lige som det er

Krumningstøjning κ
Snitmoment M
Bøjningsstivhed EI

⁸Husk, at stregen over en størrelse blot betyder, at størrelsen har en given værdi — her lig med det moment, vi er villige til at påføre bjælken. I øvrigt skyldes anvendelsen af bogstavet C til at betegne et moment, at et moment på engelsk også hedder *couple*, fordi et moment traditionelt indføres som et kraftpar, men se, hvordan et moment forklares her.

tilfældet for stængerne — at materialets *elasticitetskoefficient* E indgår lineært i den fysiske sammenhæng (1.14). For de bjælker, vi beskæftiger os med her, er I lig med (*bøjnings*)*inertimomentet* for bjælkens tværsnit.

1.3.2 Bjælkens Kinematiske Forhold

Krumningsradien er svær at bestemme

At udregne krumningsradien R eller krumningstøjningen κ viser sig at være ganske kompliceret for en vilkårlig plan kurve, men heldigvis kan vi nøjes med en noget forenklet version, idet vi vil udnytte, at flytningerne regnes meget små i forhold til bjælkelængden.

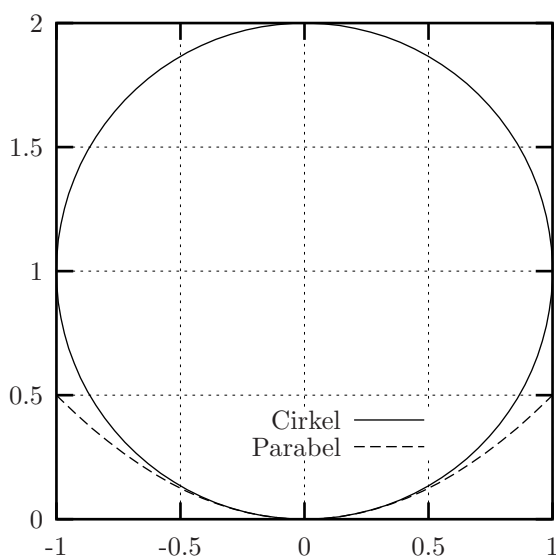


Fig. 1-3.9: Cirkel og tilnærmende parabel.

Som det ses af Fig. 1-3.9, følger parabelen ganske godt cirklen for numerisk set små værdier af abscissen, som vi vil benævne x , medens y er ordinaten. Lad radius være R i stedet for 1 som på figuren. Da er cirkelns ligning givet ved:

$$(y - R)^2 + x^2 = R^2 \quad (1.15)$$

og den lokalt tilnærmende parabel er:

$$y = \frac{x^2}{2R} \quad (1.16)$$

Cirklen tilnærmes ved en parabel

Det turde være klart, at for cirklen er krumningen $\kappa = 1/R$, medens den er vanskeligere at finde for parabelen. Imidlertid er vi blot interesseret i et udtryk for krumningen, som kan benyttes i en lille omegn ved det fælles punkt for de to

kurver. Til dette formål udregner vi første og anden afledede af begge kurvers ligning:

$$\text{Parablen: } y' = \frac{x}{R} \quad \text{og} \quad y'' = \frac{1}{R} \quad (1.17)$$

og

$$\text{Cirklen: } \left. \begin{aligned} y' &= \frac{x}{(R^2 - x^2)^{1/2}} \approx \frac{x}{R} \\ y'' &= \frac{R^2}{(R^2 - x^2)^{3/2}} \approx \frac{1}{R} \end{aligned} \right\} \text{ for } |x| \ll R \quad (1.18)$$

Som det ses, falder første og anden afledede af de to kurver næsten sammen for $|x| \ll R$, og vi vil derfor benytte følgende tilnærmelse til krumningen:

$$\kappa \approx y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (1.19)$$

Idet vi her kun vil tage hensyn til *tværbøjningen* $w(x)$, se Fig. 1-3.10, vil

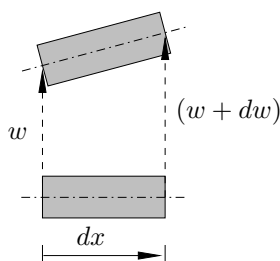


Fig. 1-3.10: Den udbøjede bjælke.

vi lade κ , defineret ved (1.20) nedenfor, være den størrelse, der udtrykker, hvor meget bjælken er krummet:

$$\kappa = w''(x) \quad \text{eller} \quad \kappa = \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (1.20)$$

Tilnærmet
krumningstøj-
ning
 $\kappa \approx w''(x)$

1.3.3 Bjælkens Statiske Forhold

Det vil nok falde de fleste unaturligt, at vi opstiller ligevægt for et infinitesimalt bjælkeelement i den *udeformerede* tilstand i stedet for den *deformerede*, se Fig. 1-3.11.⁹ Imidlertid skal vi blot erindre, at vi har begrænset os til situationer, hvor den numeriske værdi af krumningsradien R er meget stor i forhold til intervallet

⁹Dette er egentlig en af mine aversioner, men det vil føre for vidt i denne sammenhæng at opstille ligevægt for den deformerede tilstand for derefter at linearisere ligningerne — det er ikke så svært, men det tager nogen tid, så her må vi leve med en lidt løsere version af sandheden.

Krumningsradi-
us $|R|$
 \gg
Bjælkelængde L

for abscissen x , hvilket vil sige, at bjælkelængden L er meget lille i forhold til $|R|$.¹⁰

$$L \ll |R| \implies |\kappa| \ll \frac{1}{L} \quad (1.21)$$

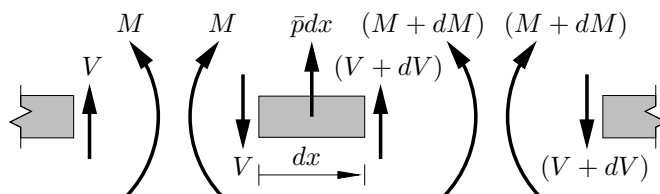


Fig. 1-3.11: Ligevægt af et infinitesimale bjælkeelement.

Ved at opstille ligevægt i retning af w for det infinitesimale bjælkeelement af længden dx findes:

$$-V(x) + \bar{p}(x)dx + (V(x) + dV(x)) = 0 \quad (1.22)$$

Forskydnings-
kraft $V(x)$

hvor $V(x)$ betegnes *forskydningskraften* i bjælken. Af (1.22) fås nu:

$$\frac{dV(x)}{dx} + \bar{p}(x) = 0 \quad \text{eller} \quad V'(x) + \bar{p}(x) = 0 \quad (1.23)$$

der er den ene af bjælkeelementets *statiske differentiaalligninger*.

Den anden ligevægt, vi vil opstille, er *momentligevægten* om bjælkeelementets *højre*¹¹ ende:

$$-M(x) + V(x)dx - \bar{p}(x)dx \left(\frac{1}{2}dx\right) + (M(x) + dM(x)) = 0 \quad (1.24)$$

dvs.

$$\frac{dM(x)}{dx} + V - \frac{1}{2}\bar{p}(x)dx = 0 \quad (1.25)$$

Da nu $dM(x)/dx$, $V(x)$ og $\bar{p}(x)$ alle må være endelige størrelser for et “rimeligt” bjælkeproblem,¹² og da dx er infinitesimal, finder vi den anden af bjælkeelementets *statiske differentiaalligninger*:

$$\frac{dM(x)}{dx} + V = 0 \quad \text{eller} \quad M'(x) + V(x) = 0 \quad (1.26)$$

¹⁰Numerisktegnene skyldes, at såvel R som κ regnes med fortegn.

¹¹Vi kunne lige så godt have opstillet momentligevægten om den *venstre* ende — udregningerne var blot blevet en smule mere komplicerede.

¹²At give en præcis definition af ordet *rimelig* er i denne sammenhæng ikke lige ud ad landevejen, men det synes ret indlysende, at der vil blive problemer ved en påført enkeltkraft. Hvis vi i Fig. 1-3.11 erstatter $\bar{p}x$ med en enkeltkraft \bar{P} , dvs. koncentrerer lasten i ét punkt, vil V' og M'' være uendelige i punktet. I sådanne tilfælde, se afsnit 1.3.8, må man indføre *overgangsbetingelser* i punktet.

Som det ses af (1.14), indgår kun momentet M af de statiske størrelser i den fysiske betingelse. Vi ønsker derfor at eliminere V af ligningerne, hvilket gøres ved at differentiere (1.26) én gang:

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} + \frac{dV(x)}{dx} = 0 \quad \text{eller} \quad M''(x) + V'(x) = 0 \quad (1.27)$$

og indsætte resultatet heraf i (1.23):

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} - \bar{p}(x) = 0 \quad \text{eller} \quad M''(x) - \bar{p}(x) = 0 \quad (1.28)$$

Dette er den statiske feltligning, vi vil benytte i det følgende.

1.3.4 Bjælkens Fysiske Forhold

For lineærelastiske bjælker gælder den fysiske betingelse (1.14), som af hensyn til systematikken gentages her:

Lineær
elasticitet

$$M(x) = EI(x)\kappa(x) \quad (1.29)$$

1.3.5 Bjælkens Tre Feltbetingelser

Som det var tilfældet for stangens vedkommende, har vi opstillet de tre betingelser, som tilsammen danner grundlaget for løsning af ethvert bjælkeproblem af den type, vi betragter her, nemlig problemer med små flytningsaffledede og med lineærelastisk materialeopførsel:

Bjælkens tre
feltbetingelser

1. Den *kinematiske feltbetingelse* (1.20):

$$\kappa(x) = w''(x),$$

2. den *statiske feltbetingelse* (1.28):

$$M''(x) - \bar{p}(x) = 0,$$

3. den *fysiske feltbetingelse* (1.29):

$$M(x) = EI(x)\kappa(x).$$

Den anden af de statiske betingelser, nemlig (1.26), $V = -M'$ benyttes alene ved omformulering af en statisk randbetingelse for V til en randbetingelse for w''' , se Eksempel Ex 1-2 nedenfor.

Også her er det værd at mærke sig, at kun den fysiske betingelse afhænger af materialet, medens de to andre er gyldige for alle materialer, og i lighed med før skal vi ikke komme nærmere ind på dette forhold i nærværende sammenhæng.

1.3.6 Flytningsdifferentialligning for Lineærelastiske Bjælker

Af hensyn til overskueligheden undlader vi også her at angive afhængigheden af længdekoordinaten x . Fremgangsmåden er i det store hele som under afsnit 1.2.6.

Ved at differentiere den fysiske betingelse (1.29), hvori den kinematiske betingelse (1.20) er indsat, to gange findes:

$$M'' = (EI\kappa)'' \quad \text{eller} \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \quad (1.30)$$

Når vi kombinerer den statiske betingelse (1.28) med den netop fundne relation (1.30), kan vi finde en differentialligning, der sammenknytter tværbøjningen w med belastningen \bar{p} :

Flytningsdifferentialligning for bjælke

$$(EIw'')'' = \bar{p} \quad \text{eller} \quad \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = \bar{p} \quad (1.31)$$

For det meget vigtige specialtilfælde, hvor stivheden $EI = \text{const.}$, bliver (1.31):

$$\text{For } EI = \text{const.}: \quad w^{iv} = \frac{\bar{p}}{EI} \quad \text{eller} \quad \frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{\bar{p}}{EI} \quad (1.32)$$

1.3.7 Randværdiproblem for Bjælken

Fjerdeordens differentialligning

Da differentialligningen (1.31) eller (1.32) er af fjerde orden, skal der benyttes fire randbetingelser til fastlæggelse af den fuldstændige løsning til et bjælke-deformationsproblem. Som det er tilfældet for stangens vedkommende, kan disse randbetingelser enten være *kinematiske* eller *statiske*, hvor den første slags er udtrykt alene ved randværdier af w og w' , idet w' er lig med vinkeldrejningen af bjælkens akse, medens de andre, som egentlig angiver randværdier af momentet M og forskydningskraften V , omformuleres, så de udtrykkes ved den anden afledede w'' , henholdsvis den tredje afledede w''' af w .

Mindst to kinematiske randbetingelser

Det er meget vigtigt at mærke sig, at der for et vilkårligt bjælkeproblem altid er netop to randbetingelser i hver ende, enten to kinematiske, to statiske eller én kinematisk og én statisk. Det er også vigtigt, at der er mindst to kinematiske randbetingelser, for ellers vil bjælken ikke være kinematisk bestemt, og dens flytninger vil derfor ikke kunne bestemmes entydigt.

Tilsammen danner differentialligningen og randbetingelserne et *randværdiproblem*.

For god ordens skyld nævnes, at den teori, der er udledt ovenfor, benævnes *Bernoulli-Euler Bjælke-teori*, og at denne teori ikke er den eneste mulige. I kapitel 2, afsnit 2.2.1, udledes den anden af de mest almindelige bjælke-teorier, nemlig *Timoshenkos Bjælke-teori*, som udover *krumningstøjningen* κ også involverer *forskydningsstøjningen* γ .

Ex 1-2 Simpel, Indspændt-Fri Bjælke

Lad os betragte et ret simpelt eksempel på en bjælke, en såkaldt indspændt-fri bjælke, som fremgår af Fig. Ex. 1-2.1. Bjælken er indspændt, dvs. fastholdt mod flytning og drejning ved $x = 0$, medens den ikke er understøttet

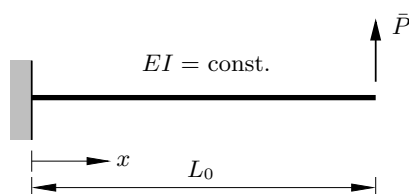


Fig. Ex. 1-2.1: Eksempel på en belastet bjælke.

ved $x = L_0$, men her belastet af kraften \bar{P} . Differentialligningen (1.31) eller (1.32) bliver derfor i dette tilfælde:

$$w^{iv} = 0 \quad \text{eller} \quad \frac{d^4 w}{dx^4} = 0, \quad \bar{p} = \text{const.} \quad (\text{Ex. 1-2.1})$$

med den generelle løsning:

$$w = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 \quad (\text{Ex. 1-2.2})$$

De fire integrationskonstanter $C_i, i = 0, \dots, 3$ bestemmes ved de fire randbetingelser:

$$\begin{aligned} \text{Kinematisk :} \quad & w(0) = 0 \\ \text{Kinematisk :} \quad & w'(0) = 0 \\ \text{Statisk :} \quad & M(L_0) = 0 \implies w''(L_0) = 0 \\ \text{Statisk :} \quad & V(L_0) = \bar{P} \implies w'''(L_0) = -\frac{\bar{P}}{EI} \end{aligned} \quad (\text{Ex. 1-2.3})$$

De to første randbetingelser medfører, at $C_0 = 0$, henholdsvis $C_1 = 0$, medens de to sidste resulterer i to ligninger med to ubekendte:

$$\begin{aligned} 2C_2 + 6L_0 C_3 &= 0 \\ 0C_2 + 6C_3 &= -\frac{\bar{P}}{EI} \end{aligned} \quad (\text{Ex. 1-2.4})$$

med løsningen:

$$C_2 = +\frac{\bar{P}L_0}{2EI} \quad \text{og} \quad C_3 = -\frac{\bar{P}}{6EI} \quad (\text{Ex. 1-2.5})$$

hvorfor

$$w(x) = \frac{1}{3} \frac{\bar{P}L_0^3}{EI} \left(\frac{3}{2} \left(\frac{x}{L_0} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L_0} \right)^3 \right) \quad (\text{Ex. 1-2.6})$$

Spidsudbøjningen $w(L_0)$ er af særlig interesse, hvorfor den udregnes:

$$w(L_0) = \frac{1}{3} \frac{\bar{P}L_0^3}{EI} \quad (\text{Ex. 1-2.7})$$

Som kontrol af løsningen udregnes snitmomentet $M(x)$ og forskydningskraften i bjælken:

$$M(x) = EIw''(x) = \bar{P}L_0 \left(1 - \left(\frac{x}{L_0}\right)\right) \quad (\text{Ex. 1-2.8})$$

henholdsvis:

$$V(x) = -EIw'''(x) = \bar{P} \quad (\text{Ex. 1-2.9})$$

Det ses, at snitmomentet $M(x)$ falder lineært fra værdien $\bar{P}L_0$ ved indspændingen til 0 ved den fri ende, medens forskydningskraften $V(x)$ konstant er lig med \bar{P} over hele bjæklængden. Begge resultater er intuitivt fornuftige, hvorfor vi kan gå ud fra, at vi ikke har regnet fejl.

1.3.8 Overgangsbetingelser — Kontinuitet

Diskontinuiteter

Overgangsbetingelser

Når der optræder diskontinuiteter, for eksempel i bøjningsstivheden EI , ved en enkeltkraft \bar{P} eller et påsat moment \bar{C} , skal man opstille *overgangsbetingelser*, som falder i to grupper, nemlig de kinematiske og de statiske. De kinematiske overgangsbetingelser eller kontinuitetsbetingelser udsiger ganske enkelt, at bjælken skal bevare sin sammenhæng overalt, dvs. den må ikke rives over eller knækkes i noget punkt. De statiske overgangsbetingelser er af en lidt anden karakter, idet de udtrykker, at forskydningskraft og bøjningsmoment ændrer sig med bidrag, der er lig med de påsatte enkeltkræfter henholdsvis enkeltmomenter.

Ex 1-3 Overgangsbetingelser

På Fig. Ex. 1-3.1 optræder alle diskontinuiteter i samme punkt, hvilket ikke altid er tilfældet. Enkeltkraften \bar{P} og enkeltmomentet \bar{C} behøver ikke at an-

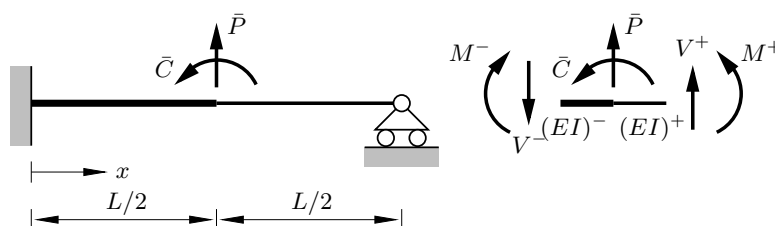


Fig. Ex. 1-3.1: Eksempel på overgangs- eller kontinuitetsbetingelser.

gribe i samme punkt, og de er ikke nødvendigvis knyttet til det punkt, hvori der forekommer et spring i bøjningsinertimomentet. Af hensyn til overskue-

ligheden er det dog gjort her. For vort eksempel er overgangsbetingelserne:

Kinematiske overgangsbetingelser:

$$\text{Translation} \quad w\left(\frac{L}{2}\right)^+ = w\left(\frac{L}{2}\right)^-$$

$$\text{Rotation} \quad w'\left(\frac{L}{2}\right)^+ = w'\left(\frac{L}{2}\right)^-$$

Statiske overgangsbetingelser:

(Ex. 1-3.1)

$$\text{Moment} \quad M\left(\frac{L}{2}\right)^+ = M\left(\frac{L}{2}\right)^- - \bar{C}$$

$$\implies (EIw''\left(\frac{L}{2}\right))^+ = (EIw''\left(\frac{L}{2}\right))^- - \bar{C}$$

$$\text{Forskydningskraft} \quad V\left(\frac{L}{2}\right)^+ = V\left(\frac{L}{2}\right)^- - \bar{P}$$

$$\implies ((EIw'')'\left(\frac{L}{2}\right))^+ = ((EIw'')'\left(\frac{L}{2}\right))^- + \bar{P}$$

For at finde løsningen til dette bjælkeproblem skal man altså tilfredsstille 4 overgangsbetingelser ud over de sædvanlige 4 randbetingelser. Man skal altså løse et lineært ligningssystem med 8 ligninger, hvilket ofte volder vanskeligheder, hvis det gøres i hånden. I dette tilfælde bliver nogle af ligningerne meget enkle at løse, hvorved arbejdet med at finde det endelige flytningsfelt alligevel bliver nogenlunde overkommeligt, men se senere. Det letter overskueligheden at opstille problemet på matrixform, men først skal flytningsfeltet opskrives, så det passer til denne strategi:

$$w(x) = \begin{cases} v_1 + v_2x + v_3x^2 + v_4x^3 & \text{for } 0 < x < L/2 \\ v_5 + v_6x + v_7x^2 + v_8x^3 & \text{for } L/2 < x < L \end{cases} \quad (\text{Ex. 1-3.2})$$

hvor $v_j, j = 1, \dots, 8$ er konstanter, der bestemmes ud fra rand- og overgangsbetingelserne.¹³

I (Ex. 1-3.3) er rand- og overgangsbetingelserne opstillet på matrixform, idet randbetingelserne ved venstre ende optager de to første ligninger, medens randbetingelserne ved den højre ende findes til sidst. Ligningerne 3–6 udtrykker overgangsbetingelserne i den rækkefølge, der er givet i (Ex. 1-3.1). Ligningerne 1–2 beskriver således de to kinematiske randbetingelser ved $x = 0$, dvs. $w(0) = 0$ og $w'(0) = 0$, ligning 7 den kinematiske randbetingelse ved $x = L$, dvs. $w(L) = 0$, og ligning 8 den statiske randbetingelse ved $x = L$, dvs. $M(L) = 0$. På matrixform kan vi udtrykke dette:

$$[k]\{v\} = \{\bar{r}\} \quad (\text{Ex. 1-3.3})$$

¹³Løsningen er polynomial, fordi bøjningsstivheden er konstant på de to bjælkelede.

hvor

$$[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (L/2) & (L/2)^2 & (L/2)^3 & -1 & -(L/2) & -(L/2)^2 & -(L/2)^3 \\ 0 & 1 & 2(L/2) & 3(L/2)^2 & 0 & 0 & -2(L/2) & -3(L/2)^2 \\ 0 & 0 & 2(EI)^- & 6(L/2)(EI)^- & 0 & 0 & -2(EI)^+ & -6(L/2)(EI)^+ \\ 0 & 0 & 0 & 6(EI)^- & 0 & 0 & 0 & -6(EI)^+ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6L \end{bmatrix}$$

$$\{v\}^T = [v_1; v_2; v_3; v_4; v_5; v_6; v_7; v_8]$$

og

$$\{\bar{r}\}^T = [0; 0; 0; 0; \bar{C}; -\bar{P}; 0; 0]$$

hvor T angiver transponering.

For enkelhedens skyld vil vi i det følgende forudsætte, at $\bar{C} = 0$, og at $(EI)^+ = (EI)^- = EI$, hvorved løsningen af ligningssystemet bliver nogenlunde overkommeligt selv i hånden, men de ganske mange operationer taget i betragtning er det en god ide at lade en computer gøre arbejdet. Jeg har vænnet mig til at benytte programmet MuPAD, men Maple, Mathematica eller det gamle MuMath kunne have været anvendt i stedet. Syntaksen i MuPAD og i Maple afviger ikke meget fra hinanden, og selv folk, der er vant til andre programmer til symbolsk manipulation af matematik skulle ikke have besvær med at læse nedenstående MuPAD-program.

```
// Til senere brug udskriver vi forskellige resultater
// i en fil. Da vi ønsker et pænt output, udskriver vi i
// LaTeX-format:
TeXFile:=fopen(Text,"Beam.out",Write);

// For at gøre programmet generelt vil vi ikke forudsætte,
// at bøjningsstivheden er ens overalt, men indfører EIp, der
// betyder EI på plussiden, og EIm som er EI på minussiden.
// Vi sætter dem godt med det samme begge lig med EI, men hvis
// udkommenterer de næste to linier, kan vi opnå løsningen for
// forskellige bøjningsstivheder.
EIp:=EI;
EIm:=EI;
// Det påsatte moment er i dette tilfælde lig med 0, men af
// hensyn til generaliteten udnytter vi ikke dette, men
// indfører C, som dog med det samme sættes lig nul.
// Skulle vi ønske at finde løsningen for C forskellig fra
// nu, udkommenterer vi blot næste linie.
C:=0;
// Nedenstående linie letter oprettelsen af matricer og vektorer
MatExpr:=Dom::Matrix();
// Først definerer vi et array, som senere benyttes som basis
// for en matrix - det virker måske en smule klodset, men det
```

```

// virker.
// Koefficientmatricen kalder vi KMat.
// Arrayet Karray skal tildeles værdier, før det kan bruges til
// at definere KMat, så vi nulstiller simpelthen Karray.
Karray:=array(1..8,1..8);
for i from 1 to 8 do
  for j from 1 to 8 do
    Karray[i,j]:=0;
  end_for;
end_for;
KMat:=MatExpr(Karray);
// Nu kan vi gå igang med at tildele KMat værdier.
KMat[1,1]:=1;

KMat[2,2]:=1;

KMat[3,1]:=1;
KMat[3,2]:=L/2;
KMat[3,3]:=(L/2)^2;
KMat[3,4]:=(L/2)^3;
KMat[3,5]:=-1;
KMat[3,6]:=-L/2;
KMat[3,7]:=-(L/2)^2;
KMat[3,8]:=-(L/2)^3;

KMat[4,2]:=1;
KMat[4,3]:=2*(L/2);
KMat[4,4]:=3*(L/2)^2;
KMat[4,6]:=-1;
KMat[4,7]:=-2*(L/2);
KMat[4,8]:=-3*(L/2)^2;

KMat[5,3]:=2*EIm;
KMat[5,4]:=6*(L/2)*EIm;
KMat[5,7]:=-2*EIp;
KMat[5,8]:=-6*(L/2)*EIp;

KMat[6,4]:=6*EIm;
KMat[6,8]:=-6*EIp;

KMat[7,5]:=1;
KMat[7,6]:=L;
KMat[7,7]:=L^2;
KMat[7,8]:=L^3;

KMat[8,7]:=2;
KMat[8,8]:=6*L;

// Højresidevektoren kalder vi RVec, men først skal vi have et
// array som skal danne basis.
Rarray:=array(1..8);
for i from 1 to 8 do
  Rarray[i]:=0;
end_for;
RVec:=MatExpr(Rarray);
RVec[5]:=C;
RVec[6]:=-P;

```

```

// Vi løser det lineære ligningssystem:
VVec=:linalg::matlinsolve(KMat,RVec);

// Lad os se indholdet af ligningssystemet med løsningen indsat:
fprintf(Unquoted,TeXFile,"$",generate::TeX(KMat),"$");
// Lad os se indholdet af VVec:
fprintf(Unquoted,TeXFile,"$",generate::TeX(VVec),"$");
// Lad os se indholdet af RVec:
fprintf(Unquoted,TeXFile," = $",generate::TeX(RVec),"$");
fprintf(Unquoted,TeXFile,"\\par\\bigskip");

// Flytningsfelterne på de to sider af diskontinuiteten
// gives ret indlysende betegnelser:
wminus:=VVec[1] + VVec[2]*x +VVec[3]*x^2 +VVec[4]*x^3;
wplus:= VVec[5] + VVec[6]*x +VVec[7]*x^2 +VVec[8]*x^3;

// Vi checker, at udbøjningen i diskontinuitetspunktet er
// den samme, hvad enten vi nærmer os punktet fra venstre
// eller fra højre:
wminushalf:=subs(wminus,x=L/2);
wplushalf:= subs(wplus, x=L/2);
// Lad os se, om flytningen er kontinuert:
fprintf(Unquoted,TeXFile,"$w^- = ",generate::TeX(wminushalf),"$");
fprintf(Unquoted,TeXFile,"    $w^+ = ",generate::TeX(wplushalf),"$");
fprintf(Unquoted,TeXFile,"\\;,\\quad");

// Vi checker, at vinkeldrejningen i diskontinuitetspunktet er
// den samme, hvad enten vi nærmer os punktet fra venstre
// eller fra højre:
wminusP:=diff(wminus,x);
wplusP:=diff(wplus,x);
wminusPhalf:=subs(wminusP,x=L/2);
wplusPhalf:= subs(wplusP, x=L/2);
// Lad os se, om vinkeldrejningen er kontinuert:
fprintf(Unquoted,TeXFile,"${w'}^- = ",generate::TeX(wminusPhalf),"$");
fprintf(Unquoted,TeXFile,"    ${w'}^+ = ",generate::TeX(wplusPhalf),"$");
fprintf(Unquoted,TeXFile,"\\par\\bigskip");

// Vi checker momentkontinuiteten i diskontinuitetspunktet:
wminusPP:=diff(wminusP,x);
Mminus:=EIm*subs(wminusPP,x=L/2);
wplusPP:=diff(wplusP,x);
Mplus:= EIp*subs(wplusPP,x=L/2);
Mplus-Mminus;
// Lad os se, om momentet er kontinuert:
fprintf(Unquoted,TeXFile,"$M^- = ",generate::TeX(Mminus),"$");
fprintf(Unquoted,TeXFile,"    $M^+ = ",generate::TeX(Mplus),"$");
fprintf(Unquoted,TeXFile,"\\;,\\quad");

// Vi checker kontinuiteten af forskydningskraften
// i diskontinuitetspunktet:
wminusPPP:=diff(wminusPP,x);
Vminus:=EIm*subs(wminusPPP,x=L/2);
wplusPPP:=diff(wplusPP,x);
Vplus:= EIm*subs(wplusPPP,x=L/2);
Vplus-Vminus;
// Lad os se, om forskydningskraften er kontinuert:
fprintf(Unquoted,TeXFile,"$V^- = ",generate::TeX(Vminus),"$");

```

```
fprint(Unquoted,TeXFile,"    $V^+ = ",generate::TeX(Vplus),"$");

// Vi skal huske at lukke filen:
fclose(TeXFile);
```

Af hensyn til udseendet af outputtet, når det indlemmes i et \LaTeX 2 ϵ -dokument, er det oftest nødvendigt at “doktorere” en smule. Personligt bryder jeg mig ikke om de bløde parenteser, som indeslutter matricer og vektorer nedenfor, men foretrækker de kantede, som det fremgår af (Ex. 1-3.3). Det er dog meget let at ændre dette i output-filen **Beam.out**. Man vil se, at EI er kursiveret, hvilket skyldes, at jeg har fjernet `\mbox`, idet der ellers ville stå: EI . Når MuPAD sætter EI ind i en boks (`\mbox{EI}`), forhindrer det, at dens indhold bliver tolket som en formel. For øvrigt ville det gå helt galt, hvis vi havde indført $E*I$ i MuPAD-programmet, eftersom både E og I er beskyttede i MuPAD, idet E er lig med den naturlige logaritmes base e , og I betegner den imaginære aksens enhed i .

Outputtet fra MuPAD-programmet er:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} & \frac{L^3}{8} & -1 & -\frac{L}{2} & -\frac{L^2}{4} & -\frac{L^3}{8} \\ 0 & 1 & L & \frac{3L^2}{4} & 0 & -1 & -L & -\frac{3L^2}{4} \\ 0 & 0 & 2EI & 3LEI & 0 & 0 & -2EI & -3LEI \\ 0 & 0 & 0 & 6EI & 0 & 0 & 0 & -6EI \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3LP}{32EI} \\ -\frac{11P}{96EI} \\ -\frac{L^3P}{48EI} \\ \frac{L^2P}{8EI} \\ -\frac{5LP}{32EI} \\ \frac{5P}{96EI} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w^- = \frac{7L^3P}{768EI}, w^+ = \frac{7L^3P}{768EI}, \quad w'^- = \frac{L^2P}{128EI}, w'^+ = \frac{L^2P}{128EI}$$

$$M^- = -\frac{5LP}{32}, M^+ = -\frac{5LP}{32}, \quad V^- = -\frac{11P}{16}, V^+ = \frac{5P}{16}$$

som viser, at kontinuitetskravene er tilfredsstillet.

Ex 1-4 Betingelser ved Mellemunderstøtning

I eksempel Ex 1-3 var det spring i bøjningsstivheden og de koncentrerede belastninger \bar{P} og \bar{C} , der gav anledning til, at vi måtte opstille kontinuitetsbetingelserne for $x = L/2$. I dette eksempel vil vi beskæftige os med et analogt tilfælde, nemlig en kontinuert bjælke, se Fig. Ex. 1-4.1. Her er

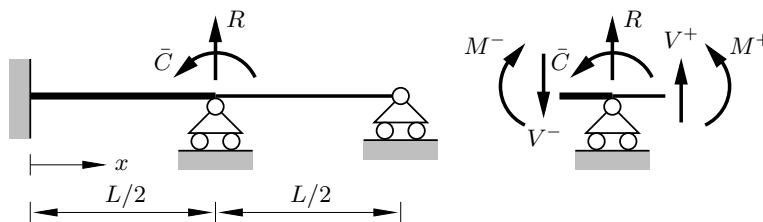


Fig. Ex. 1-4.1: Eksempel på overgangs- eller kontinuitetsbetingelser i kontinuert bjælke.

betingelserne ved $x = L/2$:

Kinematiske overgangsbetingelser:

$$\text{Translation} \quad w\left(\frac{L}{2}\right)^- = 0$$

$$\text{Translation} \quad w\left(\frac{L}{2}\right)^+ = 0$$

$$\text{Rotation} \quad w'\left(\frac{L}{2}\right)^+ = w'\left(\frac{L}{2}\right)^- \quad (\text{Ex. 1-4.1})$$

Statisk overgangsbetingelse:

$$\text{Moment} \quad M\left(\frac{L}{2}\right)^+ = M\left(\frac{L}{2}\right)^- - \bar{C}$$

$$\implies (EIw''\left(\frac{L}{2}\right))^+ = (EIw''\left(\frac{L}{2}\right))^- - \bar{C}$$

Det kan måske undre, at der ikke er noget eksplicit krav til kontinuitet i forskydningskraften, svarende til (Ex. 1-3.1d), men grunden er, at der nu er to randbetingelser — ikke overgangsbetingelser — for translationen ved $x = L/2$, nemlig (Ex. 1-4.1a) og (Ex. 1-4.1b). Til slut skal løsningen naturligvis tilfredsstille kontinuitet i forskydningskraften V , men da reaktionen R ikke er foreskrevet — den kan ikke foreskrives, når den tilsvarende translation er foreskrevet — indstiller værdien af R sig, så dette krav er opfyldt.

Skønt det ligger uden for rammerne af nærværende eksempler, nævnes, at et *Virtuelt Arbejdes Princip*, enten *De Virtuelle Flytningers Princip* eller *De Virtuelle Kræfters Princip*, klart viser, at man ikke kan foreskrive både en flytningsstørrelse og dens associerede kraftstørrelse, her $w(L/2)$ og R . I det hele taget er de virtuelle arbejdes principper meget centrale inden for alt, der har at gøre med teori for bærende konstruktioner, blandt andet fordi de viser dualiteten mellem statiske og kinematiske størrelser. Det gælder i øvrigt ikke kun for statiske problemer, men i lige så høj grad også for dynamiske problemer, at virtuelle arbejdes principper er helt fundamentale. Kan man således ikke etablere et virtuelt arbejdes princip for et foreliggende problem, kan man være sikker på, at der er fejl i problemformuleringen.

Eftersom dette problem er meget analogt til det, der behandlede i eksempel Ex 1-3, anføres kun resultaterne nedenfor, medens MuPAD-programmet ikke vises. For god ordens skyld nævnes, at ovenstående ligninger er ordnet,

så de udtrykker:

Kinematiske overgangsbetingelser:

$$\begin{array}{ll} \text{Translation} & w(0) = 0 \\ \text{Rotation} & w'(0) = 0 \\ \text{Translation} & w\left(\frac{L}{2}\right)^- = 0 \\ \text{Translation} & w\left(\frac{L}{2}\right)^+ = 0 \\ \text{Rotation} & w'\left(\frac{L}{2}\right)^+ = w'\left(\frac{L}{2}\right)^- \end{array}$$

Statisk overgangsbetingelse:

$$\begin{array}{ll} \text{Moment} & M\left(\frac{L}{2}\right)^+ = M\left(\frac{L}{2}\right)^- - \bar{C} \\ & \implies (EIw''\left(\frac{L}{2}\right))^+ = (EIw''\left(\frac{L}{2}\right))^- - \bar{C} \end{array} \quad (\text{Ex. 1-4.2})$$

Kinematisk overgangsbetingelse:

$$\text{Translation} \quad w(L) = 0$$

Statisk overgangsbetingelse:

$$\begin{array}{ll} \text{Moment} & M(L) = 0 \\ & \implies (EIw''\left(\frac{L}{2}\right))^+ 0 \end{array}$$

Når alene løsningen noteres, ser outputtet ud som følger:

$$\begin{array}{llll} w^- = 0 & w^+ = 0 & w'^- = \frac{CL}{14EI} & w'^+ = \frac{CL}{14EI} \\ M^- = \frac{4C}{7} & M^+ = -\frac{3C}{7} & V^- = \frac{12C}{7L} & V^+ = \frac{6C}{7L} \end{array}$$

idet der igen er rettet lidt i udseendet af formlerne.

1.3.8.1 Bemærkninger vedrørende Problemer med Overgangsbetingelser

I ovenstående eksempler Ex 1-3 og Ex 1-4 kunne vi løse problemerne analytisk. Godt nok benyttede vi en computer til dette, men med lidt tålmodighed kunne vi have løst opgaverne i hånden. Dette vil, selv med computerassistance, ikke altid kunne lade sig gøre, se for eksempel Fig. 1-3.12, som endda ikke er særlig kompliceret. I dette tilfælde vil vi i alt skulle opstille 12 betingelser, nemlig 2 ved hver understøtning og 4 ved punkt A og ved punkt B . Vi skal derfor løse et lineært ligningssystem med 12 ubekendte, hvilket nok er muligt, men som i hvert tilfælde er meget ubehageligt, hvis man ikke benytter en computer. I mange tilfælde har man bjælker der er kontinuerlige over mange fag, for eksempel 10 eller flere, og i de tilfælde vil selv computere ikke være til megen hjælp ved analytisk løsning af problemet. I sådanne tilfælde vil man være nødt til at opgive ambitionen om at finde en analytisk løsning — som for øvrigt ofte ville blive meget kompliceret — og i stedet anvende en numerisk metode. Blandt disse

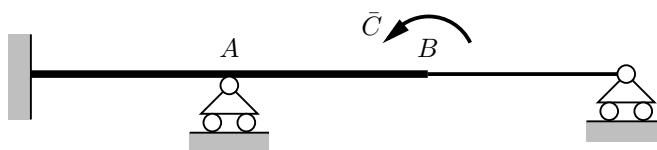


Fig. 1-3.12: Eksempel på overgangs- eller kontinuïtetsbetingelser i flerfagsbjælke.

Analytiske løsninger dur ikke ved mange overgangsbetingelser. Benyt numeriske metoder, f.eks. Element-metoden

metoder nævnes *Elementmetoden* (på engelsk *The Finite Element Method* eller blot *FEM*), der decideret sigter på benyttelse af computere, eller dens danske forløber *Deformationsmetoden*. Den sidste var oprindeligt udviklet med håndberegninger for øje, men da den kan opfattes som en Elementmetode anvendt på rammer, vil man kunne indse, at den også er velegnet til computerberegninger.

Selv om man benytter en numerisk metode, vil man ofte have behov for forskellige tilnærmelser af analytisk karakter, og afsnit 1.4 tager sigte på at diskutere nødvendigheden af dette. For enkeltheds skyld behandles kun stangproblemer i afsnit 1.4, skønt bjælkeproblemer er lige så centrale.

1.4 Behovet for Tilnærmelsesløsninger

1.4.1 Indledende Overvejelser

De to netop gennemgåede eksempler, Eksempel Ex 1-1 og Eksempel Ex 1-2, udmærker sig begge ved, at det er muligt — og, som det ses, egentlig ret enkelt — at finde analytiske løsninger. Dette er også tilfældet, om vi skulle tildele stangen eller bjælken andre randbetingelser. Hvis stivhedsegenskaberne, dvs. EA for stangen og EI for bjælken, varierer med længdekoordinaten x , vil det, selv for ganske “pæne” variationer, være meget vanskeligt eller ganske enkelt umuligt at finde en analytisk løsning på problemet, som vi skal se nedenfor. I så fald må man gribe til at benytte *tilnærmelsesmetoder*. Det er ikke for meget sagt, at der findes et utal af forskellige sådanne metoder, hvoraf nogle udmærker sig ved at være enkle at opstille og benytte, medens andre, der måske er vanskeligere at opstille, kan give bedre løsninger.

Begrebet “bedre løsninger” skal altid ses i relation til problemets karakter. Den bedste metode kan for eksempel være ret unøjagtig, hvis den er meget let at opstille og benytte, og dens nøjagtighed er tilfredsstillende til det foreliggende problem — ingen vil vel kræve samme nøjagtighed af en løsning for en dørbjælke i et enfamiliehus som for hovedbjælken i Storebæltsbroen. Skal en metode benyttes mange gange, gør det knap så meget, om den er vanskelig at opstille, hvis den er nøjagtig og for eksempel kun kræver ringe computerkraft. Et eksempel på den sidste slags metoder finder man inden for den numeriske matematik, som for eksempel de algoritmer, der benyttes til at udregne sinus, cosinus osv. på computere. Inden algoritmerne er opstillet, skal der løses vanskelige ulineære problemer, men de skal kun løses én gang, og de resulterende algoritmer viser sig at være meget effektive i henseende til computertid i forhold til simple

Ved varierende stivhedsegenskaber: Benyt tilnærmelsesmetoder

Hvad er en “god” løsning?

algoritmer. Da for eksempel sinus i en oversætters levetid skal udregnes mange millioner gange, gør det ikke noget, at en numeriker har brugt meget lang tid på at udvikle algoritmen bag løsningsmetoden.

Lad os se på et par tilsyneladende simple eksempler.

Ex 1-5 Stang med Lineært Varierende Aksialstivhed

Hvis aksialstivheden i stangen ikke som i Eksempel Ex 1-1 er konstant, men varierer, kan vi ikke længere benytte den simple udgave (1.12) af stangens differentialligning, men tvinges til at anvende (1.11).

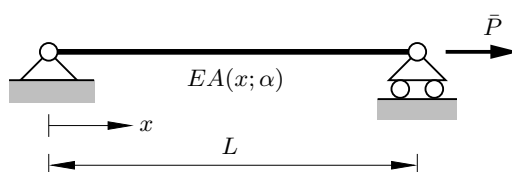


Fig. Ex. 1-5.1: Eksempel på en belastet stang.

Her vil vi analysere det stangproblem, der er illustreret i Fig. Ex. 1-5.1, idet aksialstivheden forudsættes at variere lineært:¹⁴

$$EA(x; \alpha) = EA_0 \left(1 - \alpha \frac{x}{L}\right) \quad (\text{Ex. 1-5.1})$$

hvor $EA_0 = \text{const.}$, og $0 \leq \alpha = \text{const.} < 1$

Da der ikke virker last i feltet $0 < x < L$, forenkles (1.11) til:

$$\begin{aligned} (EAu')' &= 0 \implies EAu' = C_0 \\ \implies EA_0 \left(1 - \alpha \frac{x}{L}\right) u'(x; \alpha) &= C_0 \end{aligned} \quad (\text{Ex. 1-5.2})$$

dvs.

$$u'(x; \alpha) = \frac{C_0}{EA_0} \frac{1}{1 - \alpha \frac{x}{L}} \quad (\text{Ex. 1-5.3})$$

Ex 1-5.1 Eksakt Løsning

I stedet for at opstille den generelle løsning først, vil vi udnytte den fysiske betingelse (1.9) i forbindelse med det specifikke udtryk (Ex. 1-5.1) for aksialstivheden og den kinematiske betingelse (1.5) til at opnå:

$$\begin{aligned} N(x; \alpha) &= EA_0 \left(1 - \alpha \frac{x}{L}\right) u'(x; \alpha) \\ \implies N(x; \alpha) &= EA_0 \left(1 - \alpha \frac{x}{L}\right) \frac{C_0}{EA_0} \frac{1}{1 - \alpha \frac{x}{L}} \end{aligned} \quad (\text{Ex. 1-5.4})$$

¹⁴For at forenkle udtrykkene er den udeformerede længde kaldt L i modsætning til Af-snit Ex 1-1, hvor den er kaldt L_0 .

Da nu den statiske randbetingelse for $x = L$ er:

$$N(L; \alpha) = \bar{P} \quad (\text{Ex. 1-5.5})$$

finder vi:

$$C_0 = \bar{P} \quad (\text{Ex. 1-5.6})$$

og altså:

$$N(x; \alpha) = \bar{P} \quad (\text{Ex. 1-5.7})$$

hvilket næppe overrasker, idet man ved et blik på Fig. Ex. 1-5.1 let kan konstatere, at normalkraften N må være konstant gennem hele stangen og derfor lig med belastningen \bar{P} . Indsættelse af (Ex. 1-5.6) i (Ex. 1-5.3) giver:

$$u'(x; \alpha) = \frac{\bar{P}}{EA_0} \frac{1}{1 - \alpha \frac{x}{L}} \quad (\text{Ex. 1-5.8})$$

med løsningen:

$$u(x; \alpha) = -\frac{\bar{P}L}{EA_0} \frac{\ln\left(1 - \alpha \left(\frac{x}{L}\right)\right)}{\alpha} + C_1 \quad (\text{Ex. 1-5.9})$$

Den kinematiske randbetingelse:

$$u(L; \alpha) = 0 \quad (\text{Ex. 1-5.10})$$

medfører, at den eksakte løsning bliver:

$$u(x; \alpha) = -\frac{\bar{P}L}{EA_0} \frac{\ln\left(1 - \alpha \left(\frac{x}{L}\right)\right)}{\alpha} \quad (\text{Ex. 1-5.11})$$

Denne løsning var ikke særlig vanskelig at finde, men hvis aksialstivheden EA varierer på blot en lidt mere kompliceret måde, som for eksempel som et andengrads polynomium i x , vil processen vise sig at være en del mere langstrakt, hvorfor tilnærmelsesløsninger vil komme på tale som indlysende alternativer. Løsningen (Ex. 1-5.11) har i øvrigt den ubehagelige egenskab, at den bryder sammen for $\alpha = 0$, eftersom både tæller og nævner her antager værdien 0. Man kan finde grænseværdien for $\alpha = 0$ ved benyttelse af *l'Hôspital's Regel*, som udsiger, at såfremt tælleren og nævneren begge antager værdien 0 i grænsen, kan man finde grænseværdien som kvotienten mellem differentialkvotienterne af tælleren og nævneren for $\alpha = 0$, hvis nævnerens grænseværdi er forskellig fra 0:

$$u(x; 0) = -\frac{\bar{P}L}{EA_0} \left(\frac{\frac{1}{1 - \alpha \frac{x}{L}} \left(-\frac{x}{L}\right)}{1} \right)_{\alpha=0} = \frac{\bar{P}L}{EA_0} \frac{x}{L} \quad (\text{Ex. 1-5.12})$$

hvilket i øvrigt var det forventelige resultat for konstant aksialstivhed. Da nu tæller og nævner i (Ex. 1-5.11) som konstateret ovenfor begge går imod 0 for α gående mod 0, vil værdier af (Ex. 1-5.11) for små værdier af α numerisk set være ganske unøjagtige, hvilket yderligere støtter ideen om at anvende alternative metoder til at opnå en løsning, der er tilstrækkelig robust og nøjagtig. Vi skal derfor se på et par muligheder for at opnå sådanne løsninger.

Ex 1-5.2 Regulær Perturbation — Asymptotisk Række

Den første metode, vi vil beskæftige os med, er en såkaldt *Regulær Perturbation*, der resulterer i en *Asymptotisk Række*. Ordet *regulær* skal ses som modsætning til *singulær*, som ville signalere, at løsningen ville indeholde en singularitet, for eksempel en spids eller lignende, for $\alpha = 0$, medens ordet *perturbation* betyder forstyrrelse, som i denne forbindelse løst kan tolkes på følgende måde: opstil løsningen for $\alpha = 0$ og forstyr den ved at antage, at α er en lille størrelse. Betegnelsen *Asymptotisk* antyder, at rækken tager sit udgangspunkt i en kendt løsning, her løsningen til problemet med konstant stangtværsnit, nemlig for $\alpha = 0$, hvorved rækken asymptotisk går mod denne løsning for afvigelsen, dvs. α , gående mod 0.

Lad en tilnærmet løsning være betegnet $\tilde{u}(x; \alpha)$, hvor:

$$u(x; \alpha) \approx \tilde{u}(x; \alpha) = \alpha^0 f_0(x) + \alpha^1 f_1(x) + \alpha^2 f_2(x) + \cdots + \alpha^j f_j(x) + \cdots + \alpha^M f_M(x) \quad (\text{Ex. 1-5.13})$$

eller

$$\tilde{u}(x; \alpha) = \sum_{j=0}^M \alpha^j f_j(x) \quad (\text{Ex. 1-5.14})$$

hvor $(M + 1)$ er antallet af led, vi mener, er nødvendigt for at opnå en tilstrækkelig god løsning.

Ideen er nu at indsætte (Ex. 1-5.13) eller (Ex. 1-5.14) i differentialligning og randbetingelser, samle led af samme potens i α og kræve ligningen opfyldt for alle værdier af x . Vi vil her benytte (Ex. 1-5.8), som omskrives, og \tilde{u} indsættes i stedet for u :

$$\left(1 - \alpha \frac{x}{L}\right) \tilde{u}'(x; \alpha) = \frac{\bar{P}}{EA_0} \quad (\text{Ex. 1-5.15})$$

dvs.

$$\left(1 - \alpha \frac{x}{L}\right) \sum_{j=0}^M \alpha^j f_j'(x) = \frac{\bar{P}}{EA_0} \quad (\text{Ex. 1-5.16})$$

Når vi samler led af samme potens af α , får vi:

$$\begin{aligned} & \alpha^0 f_0'(x) + \alpha^1 \left(f_1'(x) - \frac{x}{L} f_0'(x)\right) + \alpha^2 \left(f_2'(x) - \frac{x}{L} f_1'(x)\right) \\ & \quad \vdots \\ & + \alpha^j \left(f_j'(x) - \frac{x}{L} f_{j-1}'(x)\right) \\ & \quad \vdots \\ & + \alpha^M \left(f_M'(x) - \frac{x}{L} f_{M-1}'(x)\right) \\ & = \frac{\bar{P}}{EA_0} \end{aligned} \quad (\text{Ex. 1-5.17})$$

Som det ses af (Ex. 1-5.17), kan vi finde funktionen $f_j(x)$, når vi kender $f_{j-1}(x)$, hvilket vil sige, at vi blot behøver at løse et sæt af ligninger med én ubekendt.

Når vi således kræver (Ex. 1-5.17) opfyldt for alle værdier af α , finder vi:

$$\begin{aligned}
 f'_0(x) &= \frac{\bar{P}}{EA_0} & \implies f_0(x) &= \frac{\bar{P}L}{EA_0} \left(\frac{x}{L}\right)^1 + C_0 \\
 & & \implies f_0(x) &= \frac{1}{1} \frac{\bar{P}L}{EA_0} \left(\frac{x}{L}\right)^1 \\
 f'_1(x) &= \left(\frac{x}{L}\right)^1 f'_0(x) & \implies f_1(x) &= \frac{1}{2} \frac{\bar{P}L}{EA_0} \left(\frac{x}{L}\right)^2 + C_1 \\
 & & \implies f_1(x) &= \frac{1}{2} \frac{\bar{P}L}{EA_0} \left(\frac{x}{L}\right)^2 \\
 f'_2(x) &= \left(\frac{x}{L}\right)^2 f'_1(x) & \implies f_2(x) &= \frac{1}{3} \frac{\bar{P}L}{EA_0} \left(\frac{x}{L}\right)^3 + C_2 \\
 & & \implies f_2(x) &= \frac{1}{3} \frac{\bar{P}L}{EA_0} \left(\frac{x}{L}\right)^3 & \text{(Ex. 1-5.18)} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots \\
 f'_j(x) &= \left(\frac{x}{L}\right)^{j-1} f'_{j-1}(x) & \implies f_j(x) &= \frac{1}{j} \frac{\bar{P}L}{EA_0} \left(\frac{x}{L}\right)^j + C_j \\
 & & \implies f_j(x) &= \frac{1}{j} \frac{\bar{P}L}{EA_0} \left(\frac{x}{L}\right)^j \\
 & \vdots & \vdots & \vdots \\
 f'_M(x) &= \left(\frac{x}{L}\right)^{M-1} f'_{M-1}(x) & \implies f_M(x) &= \frac{1}{M} \frac{\bar{P}L}{EA_0} \left(\frac{x}{L}\right)^M + C_M \\
 & & \implies f_M(x) &= \frac{1}{M} \frac{\bar{P}L}{EA_0} \left(\frac{x}{L}\right)^M
 \end{aligned}$$

hvor alle integrationskonstanterne $C_j = 0$ på grund af den kinematiske randbetingelse $u(0; \alpha) = 0$. Udtrykket for den j^{te} funktion $f_j(x)$ ses at være:

$$f_j(x) = \frac{1}{j} \frac{\bar{P}L}{EA_0} \left(\frac{x}{L}\right)^j \quad \text{(Ex. 1-5.19)}$$

På kompakt form er den tilnærmede løsning nu fundet til:¹⁵

$$\tilde{u}(x; \alpha) = \frac{\bar{P}L}{EA_0} \sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{j} \alpha^{j-1} \left(\frac{x}{L}\right)^j \right) \quad \text{(Ex. 1-5.20)}$$

¹⁵Dette er i øvrigt *Taylor-rækken* eller *MacLaurin-rækken* for den eksakte løsning (Ex. 1-5.11).

Hvor god rækken er, kan — ud fra det foreliggende grundlag — kun fastlægges ud fra numeriske undersøgelser, men da vi har udviklet ud fra $\alpha = 0$, kan vi forvente, at rækkens nøjagtighed falder med stigende værdier af α , medens den må forventes at blive bedre jo højere værdi af M , vi er villige til at benytte. Fig. Ex. 1-5.2 viser en grafisk afbildning af den relative værdi af

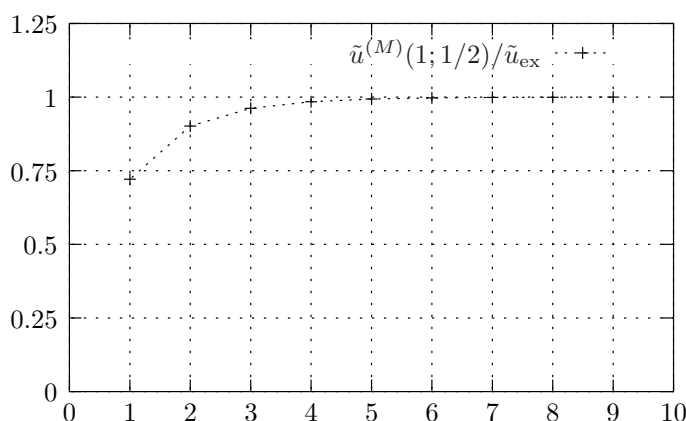


Fig. Ex. 1-5.2: Tilnærmet værdi af flytningen af spidsen for $\alpha = 1/2$ relativt i forhold til den eksakte værdi.

flytningen $\tilde{u}(L; 1/2)$ af spidsen målt i forhold til den eksakte værdi $u(L; 1/2)$ i afhængighed af antallet M af led, der er benyttet. Der er anvendt den ganske store værdi $\alpha = 1/2$, men nøjagtigheden ses alligevel at være god selv for ret få led.

Det vil naturligvis også være interessant at se, hvor gode værdier af normalkraften N , vi kan opnå ved perturbationsløsningen. Ved differentiation af $\tilde{u}(x; \alpha)$ som fundet i (Ex. 1-5.20) og indsættelse i den fysiske betingelse (Ex. 1-5.1) findes den tilnærmede løsning \tilde{N} for normalkraften:

$$\tilde{N}(x; \alpha) = \bar{P} \sum_{j=1}^M \left(\alpha^{j-1} \left(1 - \alpha \frac{x}{L} \right) \left(\frac{x}{L} \right)^{j-1} \right) \quad (\text{Ex. 1-5.21})$$

Som det ses at Fig. Ex. 1-5.3, er fejlen på normalkraften stor og først acceptabel ved omkring 6 led. Det er i øvrigt helt almindeligt, at fejlen på en kraftstørrelse er væsentlig større end på den tilsvarende flytningsstørrelse. Grunden er, at kraftstørrelsen beregnes ud fra en differentialkvotient af flytningsstørrelsen, og for hver gang en tilnærmet funktion afledes, tabes der nøjagtighed. I forbindelse med et stangproblem skal flytningen dog kun afledes én gang, medens den anden afledede af tværbøjningen w skal benyttes ved beregning af snitmomentet M i en bjælke, se (1.14) eller (1.29) i forbindelse med (1.20), som giver:

$$M(x) = EI(x)w''(x) \quad (\text{Ex. 1-5.22})$$

hvorfor vi må forvente, at der skal bruges et stort antal led ved beregningen af M .

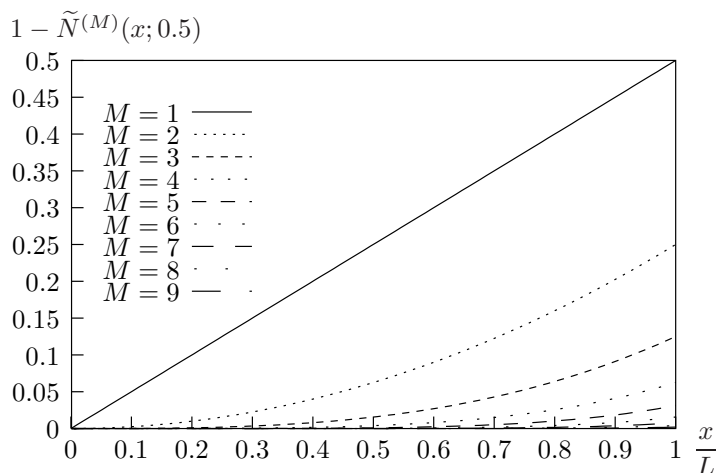


Fig. Ex. 1-5.3: Relativ fejl på den tilnærmede værdi $\tilde{N}(x; \alpha)$ af normalkraften i afhængighed af antallet af led for $\alpha = 1/2$.

Ex 1-5.3 Direkte Række

Den anden metode, vi vil benytte her ligner den første meget, men ideen er noget anderledes, idet der som udgangspunkt benyttes en rækkeudvikling i aksialkoordinaten x i stedet for perturbationsparameteren α :

$$u(x; \alpha) \approx \tilde{u}(x; \alpha) = C_0(\alpha) + C_1(\alpha)x + \cdots + C_j(\alpha)x^j + \cdots + C_M(\alpha)x^M \quad (\text{Ex. 1-5.23})$$

hvor *alle* led skal tilfredsstille de kinematiske randbetingelser, hvorfor vi kan konstatere, at:

$$C_0 = 0 \quad (\text{Ex. 1-5.24})$$

som følge af den kinematiske randbetingelse (Ex. 1-5.10).

Mere kompakt end (Ex. 1-5.23) finder vi derfor:

$$\tilde{u}(x; \alpha) = \sum_{j=1}^M C_j(\alpha)x^j \quad (\text{Ex. 1-5.25})$$

hvor M igen er et udtryk for det antal led, vi mener, er nødvendigt for at opnå en tilstrækkelig god løsning. Vi indsætter (Ex. 1-5.23) eller (Ex. 1-5.25) i differentiaalligningen (Ex. 1-5.8), samler led af samme potens i x og kræver ligningen:

$$\left(1 - \alpha \frac{x}{L}\right) \tilde{u}'(x; \alpha) = \frac{\bar{P}}{EA_0} \quad (\text{Ex. 1-5.26})$$

opfyldt for alle værdier af x :

$$\left(1 - \alpha \frac{x}{L}\right) \left(C_1(\alpha) + 2C_2(\alpha)x + 3C_3(\alpha)x^2 + \cdots + jC_j(\alpha)x^{j-1} + \cdots + MC_M(\alpha)x^{M-1} \right) = \frac{\bar{P}}{EA_0} \quad (\text{Ex. 1-5.27})$$

Når vi samler led af samme potens af x , får vi:

$$\begin{aligned}
 & C_1(\alpha)x^0 \\
 & + \left(2C_2(\alpha) - 1\frac{\alpha}{L}C_1(\alpha)\right)x^1 \\
 & + \left(3C_3(\alpha) - 2\frac{\alpha}{L}C_2(\alpha)\right)x^2 \\
 & \quad \vdots \\
 & + \left(jC_j(\alpha) - (j-1)\frac{\alpha}{L}C_{(j-1)}(\alpha)\right)x^{(j-1)} \\
 & \quad \vdots \\
 & + \left(MC_M(\alpha) - (M-1)\frac{\alpha}{L}C_{(M-1)}(\alpha)\right)x^{(M-1)} \\
 & = \frac{\bar{P}}{EA_0}
 \end{aligned} \tag{Ex. 1-5.28}$$

Ved at kræve (Ex. 1-5.28) opfyldt for alle værdier af x , finder vi:

$$\begin{aligned}
 C_1(\alpha) &= \frac{\bar{P}}{EA_0} \alpha^0, \quad C_2(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\bar{P}}{EA_0 L^1} \alpha^1, \\
 C_3(\alpha) &= \frac{1}{3} \frac{\bar{P}}{EA_0 L^2} \alpha^2, \dots, C_j(\alpha) = \frac{1}{j} \frac{\bar{P}}{EA_0 L^{j-1}} \alpha^{j-1}, \tag{Ex. 1-5.29} \\
 \dots, C_M(\alpha) &= \frac{1}{M} \frac{\bar{P}}{EA_0 L^{M-1}} \alpha^{M-1}
 \end{aligned}$$

Den tilnærmede løsning er nu fundet til:

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}(x; \alpha) &= \frac{\bar{P}L}{EA_0} \left(+\frac{1}{1}\alpha^0 \left(\frac{x}{L}\right)^1 + \frac{1}{2}\alpha^1 \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{1}{3}\alpha^2 \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right. \\
 &\quad + \dots + \frac{1}{j}\alpha^{j-1} \left(\frac{x}{L}\right)^j \\
 &\quad \left. + \dots + \frac{1}{M}\alpha^{M-1} \left(\frac{x}{L}\right)^M \right)
 \end{aligned} \tag{Ex. 1-5.30}$$

eller på mere kompakt form:

$$\tilde{u}(x; \alpha) = \frac{\bar{P}L}{EA_0} \sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{j} \alpha^{j-1} \left(\frac{x}{L}\right)^j \right) \tag{Ex. 1-5.31}$$

Vi har altså genfundet rækken (Ex. 1-5.20), men ud fra et helt andet udgangspunkt.

Ex 1-5.4 Potentiel Energi Π_P

Den tredje metode, vi vil anvende, adskiller sig fra de to første på en meget basal vis, idet der her ikke er tale om en række, hvis første j led er uberørt af, om vi øger antallet af led.

Ex 1-5.4.1 Én Fjeder Belastet af en Kraft

Først skal vi imidlertid introducere begrebet *Potentiel Energi* $\Pi_{\mathbf{P}}$, hvilket vi vil gøre ved hjælp af et meget simpelt eksempel, nemlig en fjeder med stivheden c og belastet med en kraft \bar{P} , se Fig. Ex. 1-5.4.

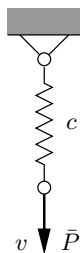


Fig. Ex. 1-5.4: En fjeder med belastning.

For denne “konstruktion” er den potentielle energi:

$$\Pi_{\mathbf{P}}(v) = \frac{1}{2}cv^2 - \bar{P}v \quad (\text{Ex. 1-5.32})$$

hvor første led på højresiden betegner den elastiske energi, tøjningsenergien, der opmagasineres i fjederen ved en forlængelse v , og det andet led er potentialet af belastningen \bar{P} . For lineærelastiske konstruktioner gælder det generelt, at den potentielle energi $\Pi_{\mathbf{P}}$ er minimum for den korrekte løsning — her vil vi i det meste af det følgende dog nøjes med at udnytte, at $\Pi_{\mathbf{P}}$ er stationær. For fjederens vedkommende vil vi dog vise minimumsegenskaben af $\Pi_{\mathbf{P}}$. Differentier (Ex. 1-5.32) med hensyn til v :

$$\frac{d\Pi_{\mathbf{P}}(v)}{dv} = cv - \bar{P} \quad (\text{Ex. 1-5.33})$$

Hvis den potentielle energi skal være stationær for den korrekte løsning, betyder det, at dens differentialkvotient skal være 0:

$$\frac{d\Pi_{\mathbf{P}}(v)}{dv} = 0 \implies v = \frac{\bar{P}}{c} \quad (\text{Ex. 1-5.34})$$

hvilket også er det resultat, vi ville forvente ud fra en simpel beregning. Differentierer vi én gang til, finder vi:

$$\frac{d^2\Pi_{\mathbf{P}}(v)}{dv^2} = c > 0 \quad (\text{Ex. 1-5.35})$$

som viser, at den potentielle energi er minimum.

Ex 1-5.4.2 To Fjedre og et Åg Belastet af en Kraft

Betragt nu det noget vanskeligere problem, der er illustreret i Fig. Ex. 1-5.5. Vi vil postulere, at den potentielle energi nu er:

$$\Pi_{\mathbf{P}}(v_1, v_2) = \frac{1}{2}(c_1v_1^2 + c_2v_2^2) - \bar{P}v \quad (\text{Ex. 1-5.36})$$

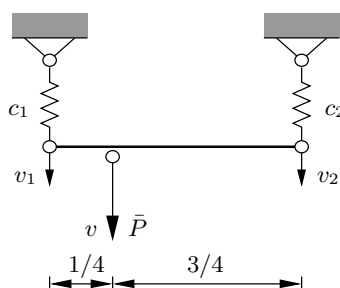


Fig. Ex. 1-5.5: To fjedre og et åg med belastning.

hvor

$$v = \frac{3}{4}v_1 + \frac{1}{4}v_2 \quad (\text{Ex. 1-5.37})$$

hvorfor

$$\Pi_{\mathbf{P}}(v_1, v_2) = \frac{1}{2} (c_1 v_1^2 + c_2 v_2^2) - \bar{P} \left(\frac{3}{4}v_1 + \frac{1}{4}v_2 \right) \quad (\text{Ex. 1-5.38})$$

Når der er tale om en funktion af flere variable, taler man om de *partielle afledede*, som angives med “bløde d^{er} ”: ∂ . For at bestemme den partielle afledede $\partial \Pi_{\mathbf{P}} / \partial v_1$ med hensyn til v_1 beregnes differentialkvotienten for fastholdt v_2 :

$$\frac{\partial \Pi_{\mathbf{P}}(v_1, v_2)}{\partial v_1} = c_1 v_1 - \frac{3}{4} \bar{P} \quad (\text{Ex. 1-5.39})$$

og tilsvarende for partiel differentiation med hensyn til v_2 :

$$\frac{\partial \Pi_{\mathbf{P}}(v_1, v_2)}{\partial v_2} = c_2 v_2 - \frac{1}{4} \bar{P} \quad (\text{Ex. 1-5.40})$$

Når vi kræver, at begge differentialkvotienter er 0, finder vi:

$$v_1 = \frac{3}{4} \frac{\bar{P}}{c_1} \quad \text{og} \quad v_2 = \frac{1}{4} \frac{\bar{P}}{c_2} \quad (\text{Ex. 1-5.41})$$

hvilket vi også kunne finde ved ligevægtsbetragtninger og benyttelse af den fysiske betingelse for de to fjedre, nemlig:

$$N_j = c_j v_j, j = 1, 2 \quad (\text{Ex. 1-5.42})$$

hvor N_j er kraften i fjeder j .

For stangen er den potentielle energi givet ved:

$$\Pi_{\mathbf{P}}(u; \alpha) = \frac{1}{2} \int_0^L EA(u')^2 dx - \bar{P}u(L) \quad (\text{Ex. 1-5.43})$$

hvor flytningsfeltet skal tilfredsstille *alle* kinematiske betingelser, herunder den kinematiske randbetingelse:

$$u(0; \alpha) = 0 \quad (\text{Ex. 1-5.44})$$

Hvorledes den partielle afledede med hensyn til en *funktion*, her $u(x)$, skal forstås, skal vi ikke komme nærmere ind på her, og vi vil med det samme indføre en tilnærmelse \hat{u} til u i $\Pi_{\mathbf{P}}$.

Ex 1-5.4.3 Løsningsantagelse med Én Parameter

Som første tilnærmelse $\tilde{u}_P^{(1)}$ vil vi benytte løsningsantagelsen:

$$\tilde{u}_P^{(1)}(x; \alpha) = a_1 x \quad (\text{Ex. 1-5.45})$$

hvor a_1 er en parameter, hvis værdi vi bestemmer nedenfor.

Herved bliver den potentielle energi:

$$\begin{aligned} \Pi_P(a_1; \alpha) &= \frac{1}{2} \int_0^L EA_0 \left(1 - \alpha \frac{x}{L}\right) a_1^2 dx - \bar{P} a_1 L \\ &= \frac{1}{2} EA_0 L \left(1 - \frac{1}{2} \alpha\right) a_1^2 - \bar{P} a_1 L \end{aligned} \quad (\text{Ex. 1-5.46})$$

og ved at forlange differentialkvotienten med hensyn til a_1 lig med 0 findes:

$$EA_0 L \left(1 - \frac{1}{2} \alpha\right) a_1 = \bar{P} L \quad (\text{Ex. 1-5.47})$$

dvs.

$$a_1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \alpha} \frac{\bar{P}}{EA_0} \quad (\text{Ex. 1-5.48})$$

hvorved den første tilnærmede løsning $\tilde{u}_P^{(1)}$ baseret på potentiel energi er:

$$\tilde{u}_P^{(1)}(x; \alpha) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \alpha} \frac{\bar{P} L}{EA_0} \left(\frac{x}{L}\right) \quad (\text{Ex. 1-5.49})$$

Flytningen af spidsen bliver da:

$$\tilde{u}_P^{(1)}(L; \alpha) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \alpha} \frac{\bar{P} L}{EA_0} \quad (\text{Ex. 1-5.50})$$

og for $\alpha = 1/2$:

$$\tilde{u}_P^{(1)}(L; 1/2) = \frac{4}{3} \frac{\bar{P} L}{EA_0} = 1.3333 \frac{\bar{P} L}{EA_0} \quad (\text{Ex. 1-5.51})$$

$$\text{cf. } u(L; 1/2) = 2 \ln(2) \frac{\bar{P} L}{EA_0} = 1.3863 \frac{\bar{P} L}{EA_0}$$

Dette resultat kan sammenholdes med det, de første to tilnærmelsesløsninger giver for ét led, nemlig:

$$\tilde{u}_T^{(1)}(L; 1/2) = \frac{\bar{P} L}{EA_0} = 1.0000 \frac{\bar{P} L}{EA_0} \quad (\text{Ex. 1-5.52})$$

som klart er dårligere end værdien opnået ved benyttelse af potentiel energi.

Ved differentiation af (Ex. 1-5.49) og benyttelse af den fysiske betingelse (1.9) finder vi den tilnærmede normalkraft $\tilde{N}_P^{(1)}(x; \alpha)$ i stangen:

$$\tilde{N}_P^{(1)}(x; \alpha) = \frac{1 - \alpha \frac{x}{L}}{1 - \frac{1}{2} \alpha} \bar{P} \quad (\text{Ex. 1-5.53})$$

Bemærk, at for $\alpha \neq 0$ forudsiges normalkraften ved denne tilnærmelse ikke at være konstant, men varierende med den korrekte værdi \bar{P} i midten. Det er faktisk ikke særlig usædvanligt, at løsninger baseret på anvendelse af potentiel energi opfører sig på denne vis. For $\alpha = 0$ findes den korrekte værdi $\tilde{N}_P^{(1)}(x; 0) = \bar{P}$.

Ex 1-5.4.4 Løsningsantagelse med To Parametre

Som næste tilnærmelse vil vi benytte:

$$\tilde{u}_P^{(2)}(x; \alpha) = a_1 x + a_2 x^2 \quad (\text{Ex. 1-5.54})$$

dvs.

$$\frac{d\tilde{u}_P^{(2)}(x; \alpha)}{dx} = a_1 + 2a_2 x \quad (\text{Ex. 1-5.55})$$

hvorved

$$\begin{aligned} \Pi_P(a_1, a_2) &= \frac{1}{2} \int_0^L EA_0 \left(1 - \alpha \frac{x}{L}\right) (a_1 + 2a_2 x)^2 dx \\ &\quad - \bar{P}(a_1 L + a_2 L^2) \end{aligned} \quad (\text{Ex. 1-5.56})$$

Vi kan nu vælge at integrere med hensyn til x i dette udtryk eller først differentiere med hensyn til a_1 og a_2 . Vi vælger den sidste mulighed:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_P(a_1, a_2)}{\partial a_1} &= EA_0 \int_0^L \left(1 - \alpha \frac{x}{L}\right) (a_1 + 2a_2 x) dx - \bar{P}L \\ &= EA_0 L \left(1 - \frac{1}{2}\alpha\right) a_1 + EA_0 L^2 \left(1 - \frac{2}{3}\alpha\right) a_2 - \bar{P}L \end{aligned} \quad (\text{Ex. 1-5.57})$$

og tilsvarende:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_P(a_1, a_2)}{\partial a_2} &= EA_0 \int_0^L \left(1 - \alpha \frac{x}{L}\right) (a_1 + 2a_2 x) 2x dx - \bar{P}L^2 \\ &= EA_0 L^2 \left(1 - \frac{2}{3}\alpha\right) a_1 + EA_0 L^3 \left(\frac{4}{3} - \alpha\right) a_2 - \bar{P}L^2 \end{aligned} \quad (\text{Ex. 1-5.58})$$

Ved nu at kræve begge differentialkvotienter lig med 0 finder vi et lineært ligningssystem med to ubekendte:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2}\alpha\right) a_1 + \left(1 - \frac{2}{3}\alpha\right) La_2 &= \frac{\bar{P}}{EA_0} \\ \left(1 - \frac{2}{3}\alpha\right) a_1 + \left(\frac{4}{3} - \alpha\right) La_2 &= \frac{\bar{P}}{EA_0} \end{aligned} \quad (\text{Ex. 1-5.59})$$

med løsningen:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{6(1 - \alpha)}{6(1 - \alpha) + \alpha^2} \frac{\bar{P}}{EA_0} \\ a_2 &= \frac{3\alpha}{6(1 - \alpha) + \alpha^2} \frac{\bar{P}}{EA_0 L} \end{aligned} \quad (\text{Ex. 1-5.60})$$

hvorved

$$\tilde{u}_P^{(2)}(x; \alpha) = \frac{6(1 - \alpha) \left(\frac{x}{L}\right) + 3\alpha \left(\frac{x}{L}\right)^2}{6(1 - \alpha) + \alpha^2} \frac{\bar{P}L}{EA_0} \quad (\text{Ex. 1-5.61})$$

med

$$\tilde{u}_P^{(2)}(L; 1/2) = \frac{18}{13} \frac{\bar{P}L}{EA_0} = 1.3846 \frac{\bar{P}L}{EA_0} \quad (\text{Ex. 1-5.62})$$

hvilket må siges at være en meget fin tilnærmelse til den eksakte værdi på $1.3863\bar{P}L/(EA_0)$, især når værdien af den tidligere tilnærmelse med to led

giver værdien $1.2500\bar{P}L/(EA_0)$. Retfærdigvis skal det dog siges, at de to led i tilnærmelsen ved benyttelse af potentiel energi kræver mere arbejde end de tidligere.

Ved differentiation af (Ex. 1-5.61) og benyttelse af den fysiske betingelse (1.9) finder vi den tilnærmede normalkraft $\tilde{N}_P^{(2)}(x; \alpha)$ i stangen:

$$\tilde{N}_P^{(2)}(x; \alpha) = \frac{\left((1 - \alpha) + \alpha \left(\frac{x}{L}\right)\right) \left(1 - \alpha \left(\frac{x}{L}\right)\right)}{(1 - \alpha) + \frac{1}{6}\alpha^2} \bar{P} \quad (\text{Ex. 1-5.63})$$

Også ved denne tilnærmelse forudsiges normalkraften ikke at være konstant, men integrerer vi $\tilde{N}_P^{(2)}(x; \alpha)$ fra 0 til L og dividerer med L , vil vi opdage, at den herved bestemte "middelværdi" er lig med \bar{P} , hvilket er helt analogt med resultatet i løsningen med én parameter.

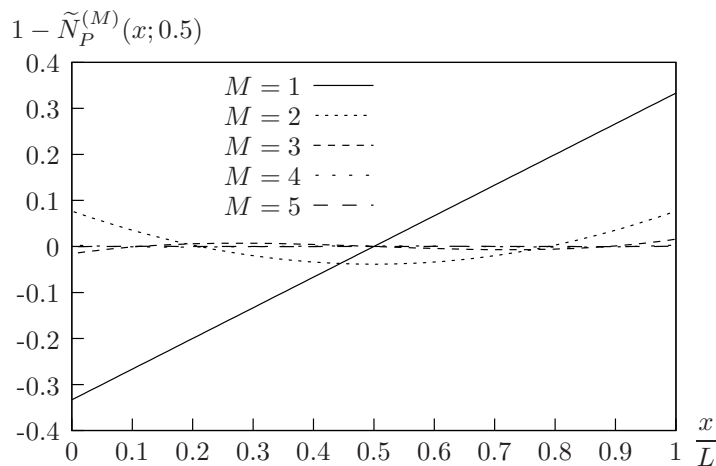


Fig. Ex. 1-5.6: Fejl på den tilnærmede værdi $\tilde{N}_P^{(M)}(x; \alpha)$ af normalkraften i afhængighed af antallet M af led for $\alpha = 1/2$.

Ex 1-5.4.5 Løsningsantagelse med Flere Parametre

Når man ønsker at benytte en tilnærmelse med flere end to parametre, kommer man næppe uden om at formulere problemet ved hjælp af *Matrixregning* — selv ved tre parametre bliver den ovenfor beskrevne metode noget uoverskuelig, hvis man ikke tager dette hjælpemiddel i brug. I sandhedens interesse skal dog bemærkes, at beregningerne i substansen ikke bliver anderledes ved anvendelse af matrixregning — de bliver blot til at håndtere. For fuldstændighedens skyld er den relative fejl på normalkraften $\tilde{N}_P^{(M)}(x; \alpha)$ afbildet i Fig. Ex. 1-5.6. Ved sammenligning med den tilsvarende afbildning Fig. Ex. 1-5.3, der var opnået med de to rækker fra Afsnit Ex 1-5.2 og Afsnit Ex 1-5.3, ses det, at for det samme antal led giver anvendelse af den

potentielle energi bedre værdier af normalkraften. Det er ikke mindst værd at notere, at fejlen på normalkraften er ganske jævn over hele stanglængden ved denne metode, medens den ved de andre metoder er nul ved venstre ende for at stige monotont til den højre.

Den ovenfor gennemgåede metode, der benytter flere parametre, og som tager princippet vedrørende minimum af den potentielle energi som sit udgangspunkt, kaldes også en *Ritz-Metode*. Den metode, der kaldes *the Finite Element Method*, og som er det mest anvendte numeriske værktøj til beregning af alle slags bygninger, såsom broer, master, kraner, skalkonstruktioner, samlingsdetaller, osv. osv., benytter i realiteten ovenstående principper og er derfor et eksempel på en Ritz-Metode.

1.5 Afsluttende Bemærkninger Vedrørende Bjælketeorier

I dette kapitel er gennemgået et par af de allervæsentligste problemer fra de bærende konstruktioners teori, nemlig deformation og ligevægt af stænger og bjælker.

De behandlede problemer er formuleret som randværdiproblemer, hvis differentiaalligninger og randbetingelser er opstillet. For både stangens og bjælkens vedkommende er randværdiproblemerne løst eksakt for konstante værdier af de fysiske egenskaber.

Det er for stangen vist, at den eksakte løsning for en stang, hvis aksialstivhed varierer lineært, har særdeles dårlige egenskaber i numerisk henseende, hvorfor det tilrådes at finde "gode" tilnærmelsesløsninger.

Under anvendelse af to rækkemetoder og en metode baseret på princippet om minimum af den potentielle energi har vi fundet tilnærmede løsninger for problemet med en stang, hvis aksialstivhed varierer lineært. Det konkluderes, at for det samme antal led i rækkerne er metoden, der baseres på potentiel energi, de andre overlegen, når der blot ses på nøjagtighed, og regnearbejdets omfang ikke vægtes ind.

Kapitel 2

Virtuelle Arbejders Principper for Plane, Retliniede Bjælker

2.1 Indledning

Det *Virtuelle Arbejdes Princip* — eller rettere de *Virtuelle Arbejders Principper* — er måske det mest centrale princip inden for statikken. Desværre er det nok også det emne, der er skrevet mest sludder om — for nu ikke at stikke noget under stolen. Den gamle, helt misvisende betegnelse for princippet, nemlig *Arbejdsligningen* har givetvis været medskyldig i en del af misforståelserne, idet der *ikke* er tale om *reelle* arbejder, men netop *virtuelle*, dvs. tænkte, arbejder, som den korrekte betegnelse tydeligt angiver. De virtuelle arbejders principper, af hvilke de to mest almindelige, nemlig *De Virtuelle Flytningers Princip* (VFP) og *De Virtuelle Kræfters Princip* (VKP), vil blive opstillet i det følgende. Det øgede også forvirringen, at man ofte ikke skelnede mellem de to nævnte former for virtuelt arbejdes princip.

I det følgende vil principperne blive udledt for retliniede *Bernoulli-Euler* og *Timoshenko*-bjælker — idet rækkefølgen dog vil være den modsatte.

Oftest vil man nutildags gå en lidt anden vej, idet man først vil udlede de virtuelle arbejders principper for et tredimensionalt legeme. Herefter vælger man tøjningsmålene for den type konstruktion, man vil behandle, postulerer de virtuelle flytningers princip gældende, og på det grundlag udleder man de statiske ligninger, såvel randbetingelser og kontinuitetsbetingelser som feltligningerne, se for eksempel (Byskov 2002a) og (Byskov 2002b). Ved denne fremgangsmåde har man forudsat, at det virtuelle arbejde er mere grundlæggende end ligevægt. Der

Virtuelle
arbejders
principper er
særlig centrale

Virtuelle
flytningers
Princip (VFP)
Virtuelle
Kræfters Princip
(VKP)

Generaliserede
(arbejdskonjugere-
rede)
spændinger og
tøjninger

er flere grunde til at vælge denne vej — nogle af dem er af ret filosofisk karakter — men den vigtigste er, at det ikke altid er særlig indlysende, hvilke spændings- og tøjningsmål, der hører sammen i et virtuelt arbejdes princip. Dette gælder i høj grad for den teori, der gælder for *Kirchhoff-Love* plader, men også for Bernoulli-Euler bjælkerne er det næppe på forhånd indlysende, at forskydningskraften ikke bidrager til det indre virtuelle arbejde, se senere.

Ved at vælge virtuelt arbejde som basis sikrer man sig, at de spændingsmål, man får defineret ud fra de statiske ligninger, altid er hinandens *arbejdskonjugerede* — man taler om *generaliserede* spændinger og tøjninger.

2.2 De Virtuelle Flytningers Princip for Plane, Retliniede Bjælker

Bernoulli-Euler
bjælker og
Timoshenko-
bjælker

For både Timoshenko- og Bernoulli-Euler bjælketeorierne vil vi tage udgangspunkt i de statiske feltligninger hørende til en eksakt løsning. For nu ikke at komplicere udledningerne unødigt vil vi antage, at den eneste belastning er en fordelt last med intensiteten $\bar{p}(x)$, hvor x betegner den aksiale koordinat, og \bar{p} er vinkelret på bjælkeaksen, således at x -aksen og \bar{p} danner et højrekoordinatsystem — lasten er “opadrettet” — se Fig. 2-2.1. Det bemærkes, at i overensstemmelse med en meget anvendt notation angiver en streg over et symbol, at størrelsen er foreskrevet.

Streg over
symbol \Rightarrow
foreskreven
værdi

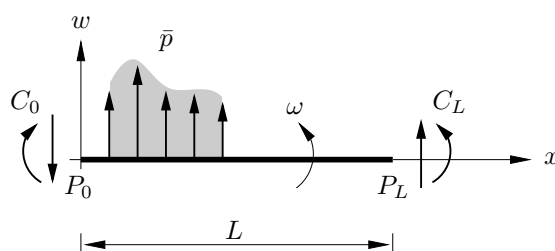


Fig. 2-2.1: Bjælke med tværlast.

Bjælkelængden betegnes L , og $]0, L[$ er det *åbne* interval, der omfatter bjælken mellem, men eksklusive, dens to ender.

Vi vil kun behandle “bjælkebøjning” og udelukker derfor aksiale påvirkninger og deformationer, men nævner, at udledningerne i det følgende meget enkelt kan udvides til også at omfatte den type fænomener. I det følgende vil vi også forudsætte, at der ikke forekommer enkeltkraftbelastninger på bjælken, men påpeger, at disse kan inkluderes ved hjælp af begrebet *Dirac’s deltafunktion* δ . Alternativt kan man opdele de følgende integrationer, så der integreres fra venstre bjælkeende til umiddelbart til venstre for enkeltkraften og fra umiddelbart til højre for enkeltkraften til højre bjælkeende. Imidlertid vil vi indføre begge de nævnte forudsætninger for at øge overskueligheden af udledningerne.

2.2.1 Timoshenkbjælker

De relevante statiske feltligninger er:¹

$$M' + V = 0 \quad \text{og} \quad V' + \bar{p} = 0, \quad x \in]0, L[\quad (2.1)$$

hvor

$$(\quad)' \equiv \frac{d(\quad)}{dx} \quad (2.2)$$

Vi kan nu multiplicere disse ligninger med to vilkårlige, kontinuerte og én gang differentiable felter $\delta\beta(x)$ og $\delta\alpha(x)$, som vi indtil videre ikke vil tillægge nogen fysisk betydning, men nævner, at det foranstillede δ angiver vilkårlighed:²

$$(M' + V)\delta\beta = 0 \quad \text{og} \quad (V' + \bar{p})\delta\alpha = 0, \quad x \in]0, L[\quad (2.3)$$

Disse ligninger kan vi summere og integrere summen, og resultatet er stadig 0:

$$\int_0^L \left((M' + V)\delta\beta + (V' + \bar{p})\delta\alpha \right) dx = 0 \quad (2.4)$$

Efter et par delvise integrationer finder vi:

$$\begin{aligned} 0 = & [M\delta\beta]_0^L - \int_0^L M\delta\beta' dx + [V\delta\alpha]_0^L \\ & + \int_0^L V\delta\beta dx - \int_0^L V\delta\alpha' dx + \int_0^L \bar{p}\delta\alpha dx \end{aligned} \quad (2.5)$$

Efter omordning af leddene i (2.5) fås:

$$\int_0^L M\delta\beta' dx + \int_0^L V(\delta\alpha' + \delta\beta) dx = [V\delta\alpha]_0^L + [M\delta\beta]_0^L + \int_0^L \bar{p}\delta\alpha dx \quad (2.6)$$

I og for sig kan (2.6) godt benyttes, som det står, men vi vil nu give $\delta\beta$ og $\delta\alpha$ fysiske betydninger, idet vi vil tolke $\delta\beta$ som en virtuel rotation $\delta\omega$ af bjælketværsnittet og $\delta\alpha$ som en virtuel tværflytning δw , hvorved (2.6) kan skrives:

$$\int_0^L M\delta\omega' dx + \int_0^L V(\delta w' + \delta\omega) dx = [V\delta w]_0^L + [M\delta\omega]_0^L + \int_0^L \bar{p}\delta w dx \quad (2.7)$$

Når vi indfører definitionen af *krumningstøjningen* κ :

$$\kappa \equiv \omega' \quad (2.8)$$

og *forskydningstøjningen* γ :

$$\gamma \equiv w' - \omega \quad (2.9)$$

kan vi finde *De Virtuelle Flytningers Princip* for en plan, retliniet Timoshenko-

¹For Bernoulli-Euler bjælker er der kun én relevant statisk feltligning, se afsnit 2.2.2.

²Egentlig betegner det nævnte δ en *variation*, men for det foreliggende problem er dette uden betydning.

bjælke:

Virtuelle
Flytningers
Princip

$$\int_0^L M \delta \kappa dx + \int_0^L V \delta \gamma dx = [V \delta w]_0^L + [M \delta \omega]_0^L + \int_0^L \bar{p} \delta w dx \quad (2.10)$$

Det bør understreges, at dette er et rent matematisk udsagn, men det kan være en hjælp til hukommelsen at give leddene i de virtuelle flytningers princip en fysisk tolkning:

Fysisk tolkning

$$\begin{aligned} \text{Indre virtuelt arbejde af snitmoment og krum-} & \int_0^L M \delta \kappa dx \\ \text{ningstøjning:} & \\ \text{Indre virtuelt arbejde af forskydningskraft og for-} & \int_0^L V \delta \gamma dx \\ \text{skydningstøjning:} & \\ \text{Ydre virtuelt arbejde af belastning og flytning:} & \int_0^L \bar{p} \delta w dx \quad (2.11) \\ \text{Ydre virtuelt arbejde af endekræfter og endeflyt-} & [V \delta w]_0^L \\ \text{ninger:} & \\ \text{Ydre virtuelt arbejde af endemomenter og endero-} & [M \delta \omega]_0^L \\ \text{tationer:} & \end{aligned}$$

Indre virtuelt
arbejde = ydre
virtuelt arbejde

I alt udtrykker (2.10) derfor, at det indre virtuelle arbejde er lig med det ydre virtuelle arbejde ved et pålagt virtuelt flytnings-tøjningsfelt, der overholder (2.8) og (2.9) samt de nævnte kontinuitets- og differentierbarhedsbetingelser.

Vi kan tydeliggøre tolkningen af randleddene, hvis vi erkender, at snitkræfter og -momenter på en venstre ende er modsatrettede de tilsvarende flytningsstørrelser. Derfor indføres:

$$P_0 = -V(0) \quad P_L = +V(L) \quad C_0 = -M(0) \quad C_L = +M(L) \quad (2.12)$$

hvorefter (2.10) kan skrives:

$$\begin{aligned} & \int_0^L M \delta \kappa dx + \int_0^L V \delta \gamma dx \\ & = \int_0^L \bar{p} \delta w dx + P_0 \delta w(0) + P_L \delta w(L) + C_0 \delta \omega(0) + C_L \delta \omega(L) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Hvis for eksempel P_0 er foreskrevet, ville betegnelsen \bar{P}_0 være mere sigende, og leddet $\bar{P}_0 \delta w$ vil da udgøre det virtuelle arbejde af den påsatte last \bar{P}_0 . Hvis derimod den tilsvarende flytning $w(0)$ er foreskrevet, betegner P_0 reaktionen mod den foreskrevne værdi af $w(0)$, og betegnelsen R_0 vil snarere blive benyttet.

Hvis vi også tager hensyn til stangvirkningen i Timoshenkbjælkerne, dvs. medtager aksialtøjningen ε og normalkraften N , i de virtuelle flytningers princip, vil dette blive:

$$\begin{aligned} & \int_0^L N \delta \varepsilon dx + \int_0^L V \delta \gamma dx + \int_0^L M \delta \kappa dx \\ &= \int_0^L \bar{p}^S \delta u dx + \int_0^L \bar{p}^B \delta w dx \\ &+ P_0^S \delta u(0) + P_L^S \delta u(L) + P_0^B \delta w(0) + P_L^B \delta w(L) \\ &+ C_0 \delta \omega(0) + C_L \delta \omega(L) \end{aligned} \quad (2.14)$$

hvor øvre index S betegner stangbidrag, og øvre index B angiver bjælkebidrag.

Ud fra det indre virtuelle arbejde kan vi konkludere, at de Timoshenkbjælakens generaliserede tøjninger er aksialtøjningen ε , forskydningstøjningen γ og krumningstøjningen κ , medens deres arbejdskonjugerede spændinger — de generaliserede spændinger — nævnt i samme rækkefølge, er normalkraften N , forskydningskraften V og bøjningsmomentet M .

2.2.2 Bernoulli-Euler Bjælker

Fremgangsmåden er her meget lig den, der benyttedes i afsnit 2.2.1, idet den dog ikke er helt så indlysende, idet der her kun er én relevant statisk feltligning:³

Bernoulli-Euler
bjælker

$$M'' - \bar{p} = 0 \quad (2.15)$$

Vi kan nu multiplicere denne ligning med et vilkårligt, kontinuert og to gange differentiabelt felt $\delta \alpha(x)$, som vi indtil videre ikke vil tillægge nogen fysisk betydning, men nævner, at det foranstillede δ angiver vilkårlighed:⁴

$$(M'' - \bar{p}) \delta \alpha = 0 \quad (2.16)$$

Denne ligning kan vi integrere, og resultatet er stadig 0:

$$\int_0^L (M'' - \bar{p}) \delta \alpha dx = 0 \quad (2.17)$$

Efter et par delvise integrationer finder vi:

$$0 = [M' \delta \alpha]_0^L - [M \delta \alpha']_0^L + \int_0^L M \delta \alpha'' dx - \int_0^L \bar{p} \delta \alpha dx \quad (2.18)$$

³At der kun skal benyttes én statisk feltligning synes ikke på forhånd klart. Dette forhold skyldes den *kinematiske* omstændighed, at Bernoulli-Euler bjælker kun har én tøjning, nemlig krumningstøjningen κ . At denne omstændighed skulle have *statiske* konsekvenser kan måske overraske.

⁴Egentlig betegner det nævnte δ en *variation*, men for det foreliggende problem er dette uden betydning. Se imidlertid kapitel 4, afsnit 4.3, hvor begrebet variation indføres.

Efter omordning af leddene i (2.18) fås:

$$\int_0^L M \delta \alpha'' dx = \int_0^L \bar{p} \delta \alpha dx - [M' \delta \alpha]_0^L + [M \delta \alpha']_0^L \quad (2.19)$$

Atter kunne vi benytte (2.19), som det står, men også her vil vi give $\delta \alpha$ en fysisk betydning, idet vi tolker $\delta \alpha$ som en virtuel tværflytning δw , hvorved (2.19) kan skrives:

$$\int_0^L M \delta w'' dx = \int_0^L \bar{p} \delta w dx - [M' \delta w]_0^L + [M \delta w']_0^L \quad (2.20)$$

For Bernoulli-Euler bjælker er definitionen af krumningstøjningen κ :

$$\kappa \equiv w'' \quad (2.21)$$

og rotationen af bjælketværsnittet ω er bundet til rotationen w' af bjælkeaksen:

$$\omega \equiv w' \quad (2.22)$$

Bernoulli-Euler
bjælker:
 $V \equiv -M'$ er en
hjælpestørrelse

For Bernoulli-Euler bjælker er forskydningskraften V en *hjælpestørrelse*, der er defineret ved den velkendte statiske feltligning (2.1a):

$$M' + V = 0 \quad (2.23)$$

dvs., at definitionen af V er:

$$V \equiv -M' \quad (2.24)$$

Nu kan vi finde *De Virtuelle Flytningers Princip* for en plan, retliniet Bernoulli-Euler bjælke:

Virtuelle
Flytningers
Princip

$$\int_0^L M \delta \kappa dx = \int_0^L \bar{p} \delta w dx + [V \delta w]_0^L + [M \delta w']_0^L \quad (2.25)$$

Også her bør det understreges, at dette er et rent matematisk udsagn, og at vi atter kan give leddene en fysisk tolkning, som vi af hensyn til overskueligheden noterer her, skønt der ikke er den store forskel fra (2.11):

Fysisk tolkning

Indre virtuelt arbejde af snitmoment og krumningstøjning:	$\int_0^L M \delta \kappa dx$	
Ydre virtuelt arbejde af belastning og flytning:	$\int_0^L \bar{p} \delta w dx$	
Ydre virtuelt arbejde af endekræfter og endeflytninger:	$[V \delta w]_0^L$	(2.26)
Ydre virtuelt arbejde af endemomenter og enderotationer:	$[M \delta w']_0^L$	

I lighed med (2.10) udtrykker (2.25), at det indre virtuelle arbejde er lig med det ydre virtuelle arbejde ved et pålagt virtuelt flytnings-tøjningsfelt, der overholder (2.21) og (2.22) samt de nævnte kontinuitets- og differentiabilitys-betingelser.

Indre virtuelt arbejde = ydre virtuelt arbejde

Atter indføres følgende af mnemotekniske årsager:

$$P_0 = -V(0) \quad P_L = +V(L) \quad C_0 = -M(0) \quad C_L = +M(L) \quad (2.27)$$

og (2.25) kan skrives:

$$\begin{aligned} & \int_0^L M \delta \kappa dx \\ &= \int_0^L \bar{p} \delta w dx + P_0 \delta w(0) + P_L \delta w(L) + C_0 \delta w'(0) + C_L \delta w'(L) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Igen bemærkes, at hvis for eksempel P_0 er foreskrevet, ville betegnelsen \bar{P}_0 være mere sigende, og leddet $\bar{P}_0 \delta w$ vil da udgøre det virtuelle arbejde af den påsatte last \bar{P}_0 . Hvis derimod den tilsvarende flytning $w(0)$ er foreskrevet, betegner P_0 reaktionen mod den foreskrevne værdi af $w(0)$, og betegnelsen R_0 vil snarere blive benyttet.

Som i afsnit 2.2.1 vil vi medtage stangbidraget i de virtuelle flytningers princip, som derved bliver:

$$\begin{aligned} & \int_0^L N \delta \varepsilon dx + \int_0^L M \delta \kappa dx \\ &= \int_0^L \bar{p}^S \delta u dx + \int_0^L \bar{p}^B \delta w dx \\ & \quad + P_0^S \delta u(0) + P_L^S \delta u(L) + P_0^B \delta w(0) + P_L^B \delta w(L) \\ & \quad + C_0 \delta w'(0) + C_L \delta w'(L) \end{aligned} \quad (2.29)$$

hvor øvre index S betegner stangbidrag, og øvre index B angiver bjælkebidrag.

I modsætning til, hvad der var tilfældet for Timoshenkbjælkerne, ses det, at forskydningskraften V ikke optræder i det indre virtuelle arbejde, fordi dens mulige arbejdskonjugerede tøjning, nemlig forskydningstøjningen, er 0 i Bernoulli-Euler bjælker. Altså er de generaliserede tøjninger i disse bjælker aksialtøjningen ε og krumningstøjningen κ , og deres arbejdskonjugerede spændinger — de generaliserede spændinger — er normalkraften N , henholdsvis bøjningsmomentet M .

2.2.3 Anvendelser af de Virtuelle Flytningers Princip for Bjælker

Den centrale position af de virtuelle flytningers princip for bjælker fremgår af dets mange anvendelser, hvoraf her nævnes nogle få. Princippet benyttes som udgangspunkt for mange tilnærmelsesløsninger for bjælke- og rammeproblemer,

Generaliserede
spændinger og
tøjninger

såvel plastiske som elastiske. Som nævnt ovenfor benyttes det til definition af *generaliserede* spændinger, når de generaliserede tøjninger er defineret. Og det anvendes til bestemmelse af snitkræfter og reaktioner i statisk bestemte bjælker og rammer, se afsnit 2.2.4.

2.2.4 Statisk Bestemte Bjælker

Statisk bestemt
bjælke

Ofte vil vi kun tillade det virtuelle flytnings-tøjningsfelt at opfylde de *homogene* kinematiske betingelser, dvs. hvis en flytningsstørrelse er foreskrevet, vil vi vælge, at den tilsvarende virtuelle flytning er 0 for at undgå et virtuelt arbejde fra den tilsvarende reaktion. Hvis for eksempel $w(L)$ er foreskrevet, vil vi vælge $\delta w(L) = 0$ for at undgå reaktionsarbejdet $V(L)\delta w(L)$, eftersom vi ikke nødvendigvis kender reaktionen $V(L)$. Det bør dog anføres, at man for *statisk bestemte* konstruktioner kan bestemme en reaktion ved at vælge et virtuelt flytningsfelt, der ikke indebærer virtuelle tøjninger, dvs. konstruktionen underkastes et virtuelt flytningsfelt, som om det var et stift legeme. De størrelser, der i dette tilfælde bidrager til det virtuelle arbejde, er alene den kendte last \bar{p} og den reaktion, hvis størrelse man søger. I samme forbindelse kan nævnes, at man også for statisk bestemte konstruktioner undertiden opgiver kravet om kontinuitet og differentiability af det virtuelle felt, idet man også her kan udsætte konstruktionen for et virtuelt felt, der ikke medfører virtuelle tøjninger, altså igen en stivlegemebevægelse, hvorved kun den kendte last og den ukendte snitkraft tilsammen udfører et virtuelt arbejde. For eksempel kan man i en statisk bestemt bjælke betemme forskydningskraften $V(x_0)$ ved at give bjælken en virtuel flytningsdiskontinuitet $\Delta\delta w(x_0)$ og i øvrigt lade det virtuelle felt være tøjningsfrit.

Virtuelt
flytningsfelt som
stift legeme for
statisk bestemte
bjælker

Ex 2-1 Bestemmelse af Snitkræfter ved de Virtuelle Flytningers Princip

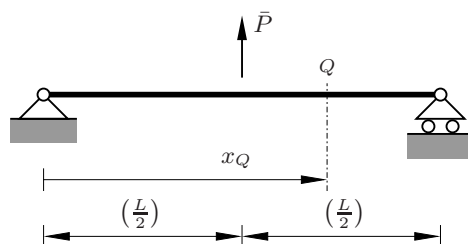


Fig. Ex. 2-1.1: Bjælke med punktlast.

I punkt Q , hvor $x_Q > \frac{1}{2}L$, på den på Fig. Ex. 2-1.1 viste simpelt understøttede bjælke ønskes forskydningskraften V_Q og snitmomentet M_Q beregnet ved anvendelse af de virtuelle flytningers princip. Da bjælken er statisk bestemt og derfor også kinematisk bestemt, kan vi underkaste den flytningsfelter, der indebærer, at kun den givne last og den ønskede snitkraft udfører

arbejde.⁵

Ex 2-1.1 Bestemmelse af Forskydningskraft

Ved at overskære bjælken i det snit, hvor forskydningskraften V_Q ønskes bestemt, kan vi foranledige, at denne udfører et arbejde, og hvis vi sørger for, at rotationerne af de to bjælke dele er lige store, vil snitmomentet M_Q totalt set ikke udføre arbejde, idet arbejdet af snitmomentet før punkt Q numerisk set er lige så stort, men med modsat fortegn af arbejdet, der

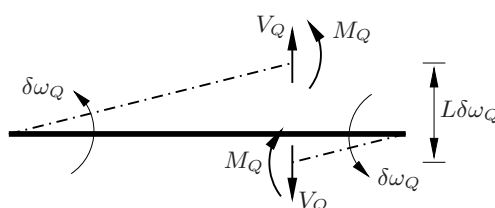


Fig. Ex. 2-1.2: Flytningsfelt til bestemmelse af forskydningskraft.

udføres af snitmomentet efter punkt Q , se Fig. Ex. 2-1.2. Vi vil benytte de virtuelle flytningers princip på de to bjælke dele hver for sig, men med det samme addere bidragene.⁶ Som det fremgår, forekommer der ikke tøjninger ved det pålagte flytningsfelt, og når vi forudsætter, at den vilkårlige rotation er infinitesimal, dvs. $\delta\omega_Q \ll 1$, bliver de virtuelle flytningers princip:

$$0 = \bar{P} \frac{1}{2} L \delta\omega_Q + V_Q L \delta\omega_Q \implies V_Q = -\frac{1}{2} \bar{P} \quad (\text{Ex. 2-1.1})$$

Fordelen ved denne fremgangsmåde er, at forskydningskraften V_Q bestemmes direkte, dvs. uden at reaktionerne først skal beregnes, hvorved fejlmulighederne begrænses. I sandhedens interesse skal det dog siges, at for et så enkelt eksempel som det foreliggende er fordelene ikke just iøjnefaldende, men eksemplet er netop valgt, fordi det ikke er kompliceret, hvorved beregningerne bliver meget overskuelige.

Ex 2-1.2 Bestemmelse af Snitmoment

Ved bestemmelse af snitmomentet M_Q benytter vi et andet flytningsfelt, der heller ikke indebærer tøjninger, se Fig. Ex. 2-1.3. Som det fremgår af figuren, udfører forskydningskræfterne før og efter punkt Q arbejder, der ophæver hinanden. Når det atter forudsættes, at det virtuelle flytningsfelt

⁵Vi vil ofte fra dette punkt tale om *arbejde*, men underforstå, at der er tale om *virtuelt arbejde*.

⁶Vi kunne også have opstillet de virtuelle flytningers princip med flytningsfelter, der indeholder diskontinuiteter. Den eneste basale forskel ville være, at integrationerne i (2.4)–(2.13) og i (2.17)–(2.28) skulle opdeles i et bidrag før og et efter diskontinuitetspunktet. Dette kan være fordelagtigt under visse omstændigheder, men i den foreliggende sammenhæng vil det blot betyde en unødvendig komplikation.

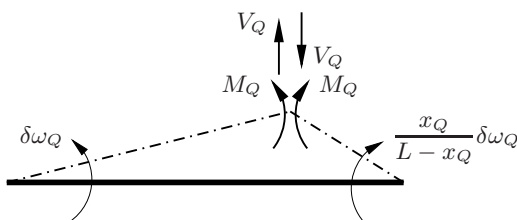


Fig. Ex. 2-1.3: Flytningsfelt til bestemmelse af snitmoment.

er vilkårligt og infinitesimalt, giver de virtuelle flytningers princip:

$$\begin{aligned}
 0 &= \bar{P} \frac{1}{2} L \delta \omega_Q + M_Q \delta \omega_Q + M_Q \frac{x_Q}{L - x_Q} \delta \omega_Q \\
 \Rightarrow M_Q &= -\frac{1}{2} \frac{L - x_Q}{L} \bar{P} L
 \end{aligned}
 \quad (\text{Ex. 2-1.2})$$

Igen er den søgte størrelse bestemt direkte.

Tidligere kaldte man ofte de virtuelle flytningers princip med tøjningsfrie flytningsfelter for *Arbejdsligningen for Stive Legemer* og udledte princippet separat. Som nævnt tidligere bør man ikke benytte det misvisende udtryk *Arbejdsligning*.

2.2.5 Eksempler på Tilnærmet Løsning ved de Virtuelle Flytningers Princip for en Lineærelastisk Bernoulli-Euler Bjælke

“Gode” løsninger

En af de store styrker ved de virtuelle flytningers princip er, at det kan benyttes til at finde “gode”⁷ tilnærmede løsninger til for eksempel elastiske bjælkeproblemer — faktisk kan man tage dette princip som udgangspunkt for opstilling af de mest almindelige versioner af den mest benyttede numeriske metode til løsning af problemer inden for statikken, nemlig *Elementmetoden* — *the Finite Element Method*.

Ex 2-2 Bjælke med Punktlast

Her skal vi blot benytte de virtuelle flytningers princip til at finde et par nogenlunde gode løsninger til det bjælkeproblem, der er vist på Fig. Ex. 2-2.1. For fuldstændighedens skyld nævnes, at der her er tale om en *Ritz-Metode*, idet de felter, vi senere vil benytte, er givet ved summen af led, der hver for sig består af ét analytisk udtryk over hele bjæklængden.

Det foreliggende problem kan relativt let løses ved hjælp af differentiaalligningen for tværubøjning, når de relevante rand- og kontinuïtetsbetingelser udnyttes. Det bør dog nævnes, at der er to bjælkestykker, nemlig for

⁷Når man taler om “gode” løsninger i denne forbindelse, menes der løsninger, der er tilstrækkeligt nøjagtige til praktiske formål, og som ikke kræver et vanskeligt matematisk apparat til opstillingen.

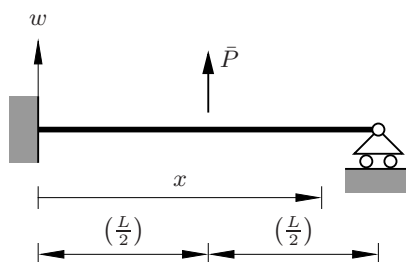


Fig. Ex. 2-2.1: Indspændt-simpelt understøttet bjælke med punktlast.

$0 < x < L/2$ og $L/2 < x < L$, med hver sin løsning, der skal kobles sammen, hvilket selvsagt indebærer noget arbejde.

Det er vigtigt at konstatere, hvilke kinematiske krav, der stilles til løsningen af det foreliggende bjælkeproblem. Det drejer sig om:

$$\begin{aligned} \text{Kinematiske feltligning :} & \quad \kappa(x) = w''(x) \\ \text{Kinematiske randbetingelser :} & \quad \begin{aligned} w(0) &= 0 \\ w'(0) &= 0 \\ w(L) &= 0 \end{aligned} \end{aligned} \quad (\text{Ex. 2-2.1})$$

Hvis vi ikke skal knække bjælken, rive den over eller flå den løs fra understøtningerne, skal disse betingelser overholdes af flytningsvariationen δw .

Ex 2-2.1 Flytningsantagelse med Ét Led

Vi vil først antage det enkleste polynomiale felt, der overholder disse betingelser:

$$\delta w(x) = (\xi^2 - \xi^3)\delta v \quad (\text{Ex. 2-2.2})$$

hvor δv er en konstant, hvis værdi viser sig at være uinteressant, idet den senere bliver divideret bort, og hvor den dimensionløse koordinat ξ er defineret ved:

$$\xi \equiv \frac{x}{L} \quad (\text{Ex. 2-2.3})$$

hvorfor

$$(\quad)' = \frac{1}{L} \frac{d(\quad)}{d\xi} \quad (\text{Ex. 2-2.4})$$

Nu er:

$$\delta \kappa = (2 - 6\xi) \frac{1}{L^2} \delta v \quad (\text{Ex. 2-2.5})$$

Vi vil antage, at den tilnærmede løsning $\tilde{w}(x) \approx w(x)$ er affin med δw :

$$\tilde{w}(x) = (\xi^2 - \xi^3)v \quad (\text{Ex. 2-2.6})$$

hvor v er en konstant, som skalerer flytningsfeltets størrelse. Kendes v , er løsningsstilnærmelsen fundet, hvorved den deraf afledede krumningstøjning $\tilde{\kappa}$ bliver:

$$\tilde{\kappa} = (2 - 6\xi) \frac{1}{L^2} v \quad (\text{Ex. 2-2.7})$$

Da de virtuelle flytningers princip for den foreliggende bjælke er:

$$\int_0^L M \delta \kappa dx = \bar{P} \delta w(L/2) \quad (\text{Ex. 2-2.8})$$

kan vi ikke umiddelbart udnytte antagelsen (Ex. 2-2.6), men må indføre den konstitutive betingelse for lineær elasticitet:

$$M(x) = EI(x) \kappa(x) \quad (\text{Ex. 2-2.9})$$

som med definitionen af krumningstøjningen κ bliver:

$$M(x) = EI(x) w''(x) \quad (\text{Ex. 2-2.10})$$

For nemheds skyld vil vi antage, at bøjningsstivheden EI er konstant. Gør vi dette og indfører (Ex. 2-2.2), (Ex. 2-2.5), (Ex. 2-2.6), (Ex. 2-2.7) og (Ex. 2-2.10) i (Ex. 2-2.8), findes:

$$L \int_0^1 EI (2 - 6\xi)^2 \frac{1}{L^4} v \delta v d\xi = \frac{1}{8} \bar{P} \delta v \quad (\text{Ex. 2-2.11})$$

dvs.

$$4 \frac{EI}{L^3} v \delta v = \frac{1}{8} \bar{P} \delta v \quad \text{eller} \quad \left(4 \frac{EI}{L^3} v - \frac{1}{8} \bar{P} \right) \delta v = 0 \quad (\text{Ex. 2-2.12})$$

Hvis vi, i overensstemmelse med hele baggrunden for de virtuelle flytningers princip, antager, at flytningsvariationen er vilkårlig, dvs., at (Ex. 2-2.12) skal gælde for alle værdier af δv , fås:

$$v = \frac{1}{32} \frac{\bar{P} L^3}{EI} \quad (\text{Ex. 2-2.13})$$

hvorved

$$\tilde{w} = \frac{1}{32} \frac{\bar{P} L^3}{EI} (\xi^2 - \xi^3) \quad (\text{Ex. 2-2.14})$$

Den tilnærmede værdi af flytningen af det punkt, hvor lasten angriber, bliver da:

$$\tilde{w}(L/2) = \frac{1}{256} \frac{\bar{P} L^3}{EI} = 0.00390625 \frac{\bar{P} L^3}{EI} \quad (\text{Ex. 2-2.15})$$

cf. den eksakte værdi

$$w_{\text{ex}}(L/2) = \frac{7}{768} \frac{\bar{P} L^3}{EI} = 0.0091345 \frac{\bar{P} L^3}{EI} \quad (\text{Ex. 2-2.16})$$

Nøjagtigheden af det opnåede resultat kan ikke just betegnes som imponerende, så lad os undersøge årsagerne dertil med henblik på at skaffe et bedre estimat af flytningsfeltet. Der er umiddelbart to alvorlige mangler

ved det antagne flytningsfelt (Ex. 2-2.6). Den første fejl består i, at flytningsfeltet indebærer en antagelse om, at krumningstøjningen og dermed bøjningsmomentet forløber lineært mellem understøtningerne, skønt det ud fra en simpel statisk betragtning må stå klart, at momentkurven knækker ved enkeltkraften \bar{P} . Det antagne flytningsfelt burde derfor ikke være differentiabelt over hele bjælkelængden. Den anden skavank er, at (Ex. 2-2.6) som resultat har, at momentet ved højre understøtning ikke forsvinder, men er lig med $1/64\bar{P}L$, hvilket numerisk set er lig med $1/10$ af den eksakte værdi af momentet ved den påførte kraft og altså ganske stort.

Ex 2-2.2 Forbedret Flytningsantagelse med Ét Led

Så længe vi ønsker at benytte en Ritz-metode, der, som nævnt tidligere, benytter antagne flytningsfelter, der er vilkårligt differentiable over hele bjælkelængden, tvinges vi til at acceptere den første fejl. Den anden kan vi omgå ved at anvende flytningsfelterne:

$$\begin{aligned}\delta w_{(2)}(x) &= \left(\xi^2 - \frac{5}{3}\xi^3 + \frac{2}{3}\xi^4\right) \delta v_{(2)} \\ \tilde{w}_{(2)}(x) &= \left(\xi^2 - \frac{5}{3}\xi^3 + \frac{2}{3}\xi^4\right) v_{(2)}\end{aligned}\tag{Ex. 2-2.17}$$

hvor det nedre index $_{(2)}$ angiver, at det drejer sig om den anden approksimation. Gennemføres en beregning, der er helt analog til den ovenfor gennemførte, fås:

$$\begin{aligned}v_{(2)} &= \frac{5}{48} \frac{\bar{P}L^3}{EI} \\ \tilde{w}_{(2)}(L/2) &= \frac{5}{576} \frac{\bar{P}L^3}{EI} = 0.008681 \frac{\bar{P}L^3}{EI}\end{aligned}\tag{Ex. 2-2.18}$$

og

$$\begin{aligned}\widetilde{M}_{(2)}(0) &= \frac{5}{24} \bar{P}L = 0.2083 \bar{P}L \\ \text{cf. } M_{\text{ex}}(0) &= -\frac{5}{48} \bar{P}L = 0.1875 \bar{P}L \\ \widetilde{M}_{(2)}(L/2) &= -\frac{5}{48} \bar{P}L = -0.1042 \bar{P}L \\ \text{cf. } M_{\text{ex}}(L/2) &= -\frac{5}{32} \bar{P}L = -0.1563 \bar{P}L\end{aligned}\tag{Ex. 2-2.19}$$

Som det ses, er fejlen på udbøjningen ved kraften $\tilde{w}_{(2)}(L/2)$ faldet ganske meget i forhold til den første tilnærmelse, medens momentet $\widetilde{M}_{(2)}(L/2)$ ved belastningen stadig lider under en fejl så stor som 33%.

Endelig bemærkes, at formen (Ex. 2-2.17) er affin med løsningen for den omhandlede bjælke, men med en jævnt fordelt belastning, hvorfor metoden i dette tilfælde — ikke overraskende — giver den eksakte løsning.

Ex 2-2.3 Flytningsantagelser med Flere Led

Som en anden mulighed for at forbedre løsningen kan nævnes, at man kan benytte flere uafhængige led tilnærmelsen. For eksempel kan vi vælge:

$$\begin{aligned}\delta w_{(N)}(x) &= \sum_{i=1}^N (\xi^{i+1} - \xi^{i+2}) \delta a_i \\ \tilde{w}_{(N)}(x) &= \sum_{i=1}^N (\xi^{i+1} - \xi^{i+2}) a_i\end{aligned}\tag{Ex. 2-2.20}$$

hvor N er antallet af led. Hvis vi udnytter vilkårligheden i $\delta w_{(N)}(x)$, dvs. at alle δa_i er indbyrdes uafhængige, kan vi opstille N ligninger til bestemmelse af koefficienterne a_1, \dots, a_N , hvorefter resten af beregningerne forløber efter samme mønster som ovenfor. Selv hvis vi gør dette, bliver resultaterne ikke særlig gode, hvad momenterne angår, især er momentet ved lasten dårligt bestemt. Fejlen på udbøjningen falder noget hurtigere, men antallet af led skal være så stort som 7, før den relative fejl på udbøjningen ved lasten er 1%.

Det bør nævnes, at det her gennemgåede eksempel faktisk ikke er særlig retfærdigt over for metoden, fordi det omhandler en belastning, der medfører en diskontinuitet af den tredje afledede af tværbøjningen.

Ex 2-3 Bjælke med Trekantformet Last

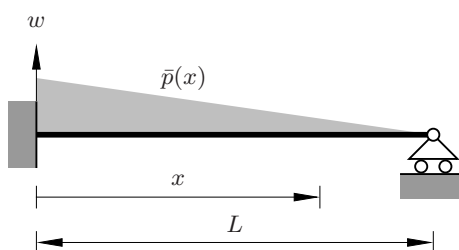


Fig. Ex. 2-3.1: Indspændt-simpelt understøttet bjælke med trekantformet last.

Hvis metoden for eksempel benyttes på den samme bjælke med en fordelt belastning som vist på Fig. Ex. 2-3.1, vil resultaterne vise sig at være meget bedre, hvad enten der benyttes den første eller den anden flytningsantagelse, og benyttes den tredje mulighed (Ex. 2-2.20), bliver resultatet korrekt med $N = 3$, eftersom den eksakte løsning netop er et femtegrads polynomium.

I dette tilfælde kan den eksakte løsning altså findes uden at løse bjælkedifferentialligningen, idet dog bemærkes, at det er kendskabet til netop den lignings karakter, der gør, at vi kan ræsonnere os frem til, at udbøjningen for en trekantformet last må være af femte grad.

2.3 De Virtuelle Kræfters Princip for Plane, Retliniede Bjælker

Generaliserede
(arbejdskonjugerede)
spændinger og
tøjninger

Virtuelle
Kræfters Princip

I de bærende konstruktioners teori, (bygning)mekanikken, er der en meget stærk dualitet mellem kinematiske og statiske størrelser, hvilket i og for sig fremgår af de virtuelle flytningers princip, idet de to typer størrelser optræder parvis i alle led — som nævnt i afsnit 2.1 siger man, at de kinematiske og statiske størrelser er hinandens *arbejdskonjugerede*. Det vil derfor næppe undre, at der findes et princip, der er analogt til de virtuelle flytningers princip, men hvor de virtuelle størrelser er statiske. Det er dette princip, *De Virtuelle Kræfters Princip* (VKP),

vi vil udlede i det følgende.

Som vi ved udledningen af de virtuelle flytningers princip tog udgangspunkt i statiske ligninger, vil vi her benytte kinematiske ligninger som basis, se afsnit 2.3.1 og 2.3.2 nedenfor. Vi vil altså for både Timoshenko- og Bernoulli-Euler bjælketeorierne tage udgangspunkt i de kinematiske feltligninger hørende til en eksakt løsning, dvs. (2.8) og (2.9) for Timoshenkbjælkerne, henholdsvis (2.20) for Bernoulli-Euler bjælkerne.

Atter vil vi undlade at betragte tilfælde med diskontinuiteter i felterne, hvilket i denne forbindelse især betyder, at enkeltkræfter må behandles enten ved benyttelse af Dirac's deltafunktion eller ved en grænseovergang for en fordelt belastning, hvis resultant holdes konstant, mens belastningsstrækningen går mod nul.

I øvrigt er alle forhold som under afsnittene vedrørende de virtuelle flytningers princip.

2.3.1 Timoshenkbjælker

De relevante kinematiske feltligninger er her (2.8) og (2.9), som efter en lille omskrivning lyder:

Timoshenko-
bjælker

$$\kappa - \omega' = 0 \quad \text{og} \quad \gamma - w' + \omega = 0, \quad x \in]0, L[\quad (2.30)$$

Efter multiplikation af disse ligninger med to vilkårlige, kontinuerte og én gang differentiable felter $\delta\beta(x)$ og $\delta\alpha(x)$, som vi foreløbig ikke tillægger nogen fysisk betydning, fås:

$$(\kappa - \omega')\delta\beta = 0 \quad \text{og} \quad (\gamma - w' + \omega)\delta\alpha = 0, \quad x \in]0, L[\quad (2.31)$$

Disse ligninger kan vi summere og integrere summen, og resultatet er stadig 0:

$$\int_0^L \left((\kappa - \omega')\delta\beta + (\gamma - w' + \omega)\delta\alpha \right) dx = 0 \quad (2.32)$$

Efter et par delvise integrationer finder vi:

$$0 = -[\omega\delta\beta]_0^L - [w\delta\alpha]_0^L + \int_0^L \left(\kappa\delta\beta + \omega\delta\beta' + \gamma\delta\alpha + w\delta\alpha' + \omega\delta\alpha \right) dx \quad (2.33)$$

Efter omordning af leddene i (2.33) fås:

$$\int_0^L (\kappa\delta\beta + \gamma\delta\alpha) dx = [\omega\delta\beta]_0^L + [w\delta\alpha]_0^L - \int_0^L \left(\omega(\delta\beta' + \delta\alpha) + w\delta\alpha' \right) dx \quad (2.34)$$

Atter kunne vi godt benytte (2.34), som det står, men af mnemotekniske grunde vil vi give $\delta\beta$ og $\delta\alpha$ fysiske betydninger, idet vi vil tolke $\delta\beta$ som et virtuelt bøjningsmoment δM og $\delta\alpha$ som en virtuel forskydningskraft δV , som

overholder eventuelle statiske randbetingelser og de statiske feltligninger, der svarer til (2.1):

$$\delta M' + \delta V = 0 \quad \text{og} \quad \delta V' + \delta \bar{p} = 0, \quad x \in]0, L[\quad (2.35)$$

og hvor vi kan vælge den virtuelle belastning $\delta \bar{p}$, som det passer os. Nu kan (2.34) skrives:

Virtuelle
Kræfters Princip

$$\int_0^L \kappa \delta M dx + \int_0^L \gamma \delta V dx = \int_0^L w \delta \bar{p} dx + [w \delta V]_0^L + [\omega \delta M]_0^L \quad (2.36)$$

som er *De Virtuelle Kræfters Princip* for en retliniet Timoshenkobjælke.

Fysisk tolkning

Igen bør det understreges, at (2.36) er et rent matematisk udsagn, men igen kan det være en hjælp til hukommelsen at give leddene i princippet — her de virtuelle kræfters princip — en fysisk tolkning:

Indre virtuelt arbejde af snitmoment og krumningstøjning: $\int_0^L \delta M \kappa dx$

Indre virtuelt arbejde af forskydningskraft og forskydningstøjning: $\int_0^L \delta V \gamma dx$

Ydre virtuelt arbejde af belastning og flytning: $\int_0^L \delta \bar{p} w dx \quad (2.37)$

Ydre virtuelt arbejde af endekræfter og endeflytninger: $[\delta V w]_0^L$

Ydre virtuelt arbejde af endemomenter og enderotationer: $[\delta M \omega]_0^L$

Indre virtuelt
arbejde = ydre
virtuelt arbejde

Som tilfældet var ved de virtuelle flytningers princip, se (2.10), udtrykker (2.36) derfor, at det indre virtuelle arbejde er lig med det ydre virtuelle arbejde ved en pålagt virtuel belastning, der overholder de statiske randbetingelser (2.35), og de nævnte kontinuitets- og differentiabilitetsbetingelser.

Som før kan vi tydeliggøre tolkningen af randleddene, hvis vi erkender, at snitkræfter og -momenter på en venstre ende er modsatrettede de tilsvarende flytningsstørrelser. Derfor indføres:

$$\begin{aligned} \delta P_0 &= -\delta V(0) & \delta P_L &= +\delta V(L) \\ \delta C_0 &= -\delta M(0) & \delta C_L &= +\delta M(L) \end{aligned} \quad (2.38)$$

hvorefter (2.36) kan skrives:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \delta M \kappa dx + \int_0^L \delta V \gamma dx \\ &= \int_0^L \delta \bar{p} w dx + \delta P_0 w(0) + \delta P_L w(L) + \delta C_0 \omega(0) + \delta C_L \omega(L) \end{aligned} \quad (2.39)$$

De sidste fire led i (2.39) fortjener uddybende forklaringer. Variationen af endesnitkræfter og -momenter skal være randværdier af variationerne af forskydningskraften og snitmomentet. I mange tilfælde vil vi insistere på, at de varierede felter overholder de *homogene* statiske randbetingelser.⁸

Hvis en kinematisk størrelse, som for eksempel $w(0)$, er foreskrevet forskellig fra 0, dvs. $w(0) = \bar{w}(0)$, vil den tilsvarende kraftstørrelse være reaktionen på den påtvungne flytning, dvs. i dette tilfælde vil δP_0 være den reaktion, der hører til $\delta \bar{p}$ med den påtvungne endetranslation $\bar{w}(0)$.

2.3.2 Bernoulli-Euler Bjælker

Her er fremgangsmåden noget mere klar end i afsnit (2.2.2), hvor det kunne synes et noget arbitrært valg kun at medtage én af de to statiske feltligninger. Ved sammenligning med afsnit (2.3.1) ses det, at der her kun kan være tale om netop én kinematisk feltligning, nemlig (2.21):

$$\kappa = w'' \quad (2.40)$$

Vi kan nu multiplicere denne ligning med et vilkårligt, kontinuert og to gange differentiabelt felt $\delta \alpha(x)$ og integrere resultatet, der stadig er 0:

$$\int_0^L (\kappa - w'') \delta \alpha dx = 0 \quad (2.41)$$

Efter et par delvise integrationer og omordning af leddene finder vi:

$$\int_0^L \kappa \delta \alpha dx = [w' \delta \alpha]_0^L - [w \delta \alpha']_0^L + \int_0^L w \delta \alpha'' dx \quad (2.42)$$

Igen ønsker vi at iklæde det fundne udtryk et fysisk klædebon. Det viser sig hensigtsmæssigt at tolke $\delta \alpha$ som et virtuelt momentfelt δM , der overholder den til (2.15) svarende statiske feltligning:

$$\delta M'' - \delta \bar{p} = 0 \quad (2.43)$$

Når dette indføres i (2.42), kan vi finde:

$$\int_0^L \delta M \kappa dx = \int_0^L \delta \bar{p} w dx - [\delta M' w]_0^L + [\delta M w']_0^L \quad (2.44)$$

⁸I denne forbindelse betyder homogen, at δP og δC er 0, hvor der er statiske randbetingelser for den tilsvarende reelle kraftstørrelse.

For Benoulli-Euler bjælker er rotationen ω af bjælketværsnittet bundet til rotationen w' af bjælkeaksen, se (2.22), som gentages her:

$$\omega \equiv w' \quad (2.45)$$

Virtuelle Kræfters Princip

Når denne relation indføres, kan vi skrive *De Virtuelle Kræfters Princip* for en retliniet Bernoulli-Euler bjælke:

$$\int_0^L \delta M \kappa dx = \int_0^L \delta \bar{p} w dx + [\delta V w]_0^L + [\delta M \omega]_0^L \quad (2.46)$$

Fysisk tolkning

Som tidligere bør det understreges, at dette udtryk er fundet ved rent matematiske omskrivninger, men at vi gerne vil give leddene en fysisk tolkning:

$$\begin{aligned} \text{Indre virtuelt arbejde af snitmoment og krum-} & \int_0^L \delta M \kappa dx \\ \text{ningstøjning:} & \\ \text{Ydre virtuelt arbejde af belastning og flytning:} & \int_0^L \delta \bar{p} w dx \\ & (2.47) \end{aligned}$$

$$\text{Ydre virtuelt arbejde af endekræfter og endeflyt-} \quad [\delta V w]_0^L$$

$$\text{ninger:} \quad [\delta M \omega]_0^L$$

Som (2.25) udtrykker, at det indre virtuelle arbejde er lig med det ydre virtuelle arbejde ved et pålagt virtuelt flytnings-tøjningsfelt, der overholder (2.43), udsiger (2.44) og (2.46), at det indre virtuelle arbejde er lig med det ydre virtuelle arbejde ved et pålagt virtuelt last-snitkraftfelt, der overholder (2.43), eventuelle statiske randbetingelser samt de nævnte kontinuitets- og differentiabilitysbetingelser.

Atter indføres følgende af mnemotekniske årsager:

$$\begin{aligned} \delta P_0 &= -\delta V(0) & \delta P_L &= +\delta V(L) \\ \delta C_0 &= -\delta M(0) & \delta C_L &= +\delta M(L) \end{aligned} \quad (2.48)$$

hvorved (2.47) kan skrives:

$$\begin{aligned} \int_0^L \delta M \kappa dx &= \int_0^L \delta \bar{p} w dx + \delta P_0 w(0) + \delta P_L w(L) \\ &+ \delta C_0 \omega(0) + \delta C_L \omega(L) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Med hensyn til uddybende forklaringer af de sidste fire led, gentages de afsluttende bemærkninger i afsnit 2.3.1: Variationen af endesnitkræfter og -momenter

skal være randværdier af variationerne af forskydningskraften og snitmomentet. I mange tilfælde vil vi insistere på, at de varierede felter overholder de *homogene* statiske randbetingelser.⁹

Hvis en kinematisk størrelse, som for eksempel $w(0)$, er foreskrevet forskellig fra 0, dvs. $w(0) = \bar{w}(0)$, vil den tilsvarende kraftstørrelse være reaktionen på den påtvungne flytning, dvs. i dette tilfælde vil δP_0 være den reaktion, der hører til $\delta \bar{p}$ med den påtvungne endetranslation $\bar{w}(0)$.

2.3.3 Anvendelser af de Virtuelle Kræfters Princip for Bjælker

De virtuelle kræfters princip for bjælker bliver især benyttet til bestemmelse af flytningsstørrelser i statisk bestemte og statisk ubestemte konstruktioner. Princippet kan for såvidt også anvendes som basis for hele beregningen af bjælke- og rammekonstruktioner, men det viser sig knap så velegnet til opstilling af computermetoder, medens den såkaldte *Kraftmetode*, der tidligere ofte anvendtes til rammeberegninger i hånden, kan opfattes som et eksempel på benyttelse af de virtuelle kræfters princip til analyse af de ovennævnte konstruktioner. Når princippet viser sig at være mindre let at benytte på computer, hænger det sammen med, at det — hvis det ikke modificeres — leder til matrixproblemer med singulære koefficientmatricer. Disse mulige modifikationer ligger uden for rammerne for denne bog og vil ikke blive berørt yderligere.

Generaliserede
(arbejdskonjugerede)
spændinger og
tøjninger

Ex 2-4 Bestemmelse af Flytninger ved de Virtuelle Kræfters Princip

Når vi ønsker at bestemme en flytningsstørrelse i en konstruktion, kan vi anvende de virtuelle kræfters princip, hvis vi lader den foreskrevne belastningsvariation bestå af variationen af en enkeltkraft. I det følgende vil vi se eksempler på dette.

Ex 2-4.1 Flytninger i en Statisk Bestemt Bernoulli-Euler Bjælke

Som eksempel på bestemmelse af flytningsstørrelser i en statisk bestemt bjælke vil vi beregne transversalflytningen w_Q og rotationen ω_Q af punkt Q i den på Fig. Ex. 2-4.1 viste bjælke. Efter indførelse af den dimensionsløse koordinat ξ ved:

$$\xi \equiv \frac{x}{L} \quad (\text{Ex. 2-4.1})$$

der er den samme formel som (Ex. 2-2.3), kan bøjningsmomentet i bjælken skrives:

$$M(\xi) = -\frac{1}{2}(1 - \xi)\xi \bar{p}L^2 \quad (\text{Ex. 2-4.2})$$

Heraf kan vi finde krumningstøjningen κ :

$$\kappa(\xi) = -\frac{1}{2}(1 - \xi)\xi \frac{\bar{p}L^2}{EI} \quad (\text{Ex. 2-4.3})$$

idet bøjningsstivheden EI er forudsat konstant.

⁹I denne forbindelse betyder homogen, at δP og δC er 0, hvor der er statiske randbetingelser for den tilsvarende reelle kraftstørrelse.

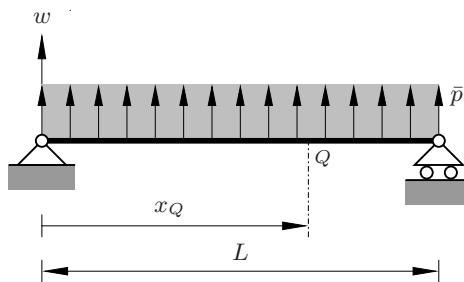


Fig. Ex. 2-4.1: Simpelt understøttet bjælke med jævnt fordelt last \bar{p} .

Ex 2-4.1.1 Bestemmelse af Tværubøjning

Når vi ønsker at beregne flytningen w_Q , påsætter vi en enkeltkraft $\delta\bar{P}$ i punkt Q , se Fig. Ex. 2-4.2. Det tilhørende virtuelle momentfelt kan da be-

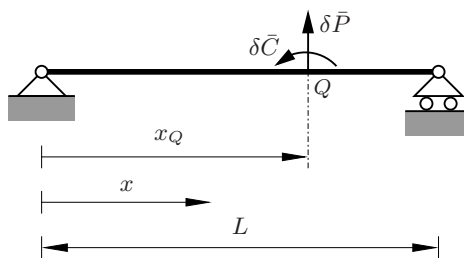


Fig. Ex. 2-4.2: Simpelt understøttet bjælke med virtuel punktlast $\delta\bar{P}$ og koncentreret virtuel momentlast $\delta\bar{C}$.

stemmes som:

$$\begin{aligned} 0 \leq \xi \leq \xi_Q : \quad \delta M &= -(1 - \xi_Q)\xi\delta\bar{P}L \\ \xi_Q \leq \xi \leq 1 : \quad \delta M &= -(1 - \xi)\xi_Q\delta\bar{P}L \end{aligned} \quad (\text{Ex. 2-4.4})$$

hvor vi bemærker, at det virtuelle momentfelt δM opfylder de nødvendige betingelser, idet det tilfredsstiller de statiske randbetingelser og er i ligevægt med den påsatte virtuelle punktlast $\delta\bar{P}$.

Med (Ex. 2-4.3) og (Ex. 2-4.4) som udgangspunkt kan vi nu opstille de virtuelle kræfters princip for vort eksempel:

$$\int_0^{x_Q} \kappa \delta M dx + \int_{x_Q}^L \kappa \delta M dx = w_Q \delta\bar{P} \quad (\text{Ex. 2-4.5})$$

eller udtrykt i den dimensionsløse koordinat ξ :

$$\begin{aligned} w_Q \delta \bar{P} = & L \int_0^{\xi_Q} \left(-\frac{1}{2}(1+\xi) \xi \frac{\bar{p}L^2}{EI} \right) \left(-(1-\xi_Q) \xi \delta \bar{P} L \right) d\xi \\ & + L \int_{\xi_Q}^1 \left(-\frac{1}{2}(1+\xi) \xi \frac{\bar{p}L^2}{EI} \right) \left(-(1-\xi) \xi_Q \delta \bar{P} L \right) d\xi \end{aligned} \quad (\text{Ex. 2-4.6})$$

dvs.

$$w_Q = \xi_Q(1-\xi_Q)(1-\xi_Q-\xi_Q^2) \frac{\bar{p}L^4}{24EI} \quad (\text{Ex. 2-4.7})$$

Udbøjningen $w_M = w(L/2)$ har særlig interesse, eftersom den er den største:

$$w_M = \frac{5}{384} \frac{\bar{p}L^4}{EI} \approx 0.013021 \frac{\bar{p}L^4}{EI} \quad (\text{Ex. 2-4.8})$$

Ex 2-4.1.2 Bestemmelse af Rotation

Da eksemplet omhandler en Bernoulli-Euler bjælke, kan vi finde rotationen ω_Q ved differentiation af udtrykket for tværbøjningen, dvs.

$$\omega_Q = \frac{1}{L} \frac{dw_Q}{d\xi} = (1-2\xi_Q)(1+2\xi_Q-2\xi_Q^2) \frac{\bar{p}L^3}{24EI} \quad (\text{Ex. 2-4.9})$$

men vi vil her benytte de virtuelle kræfters princip og påsætter den virtuelle momentlast $\delta \bar{C}$, se Fig. Ex. 2-4.2, hvorved fås det virtuelle momentfelt δM :

$$\begin{aligned} 0 \geq \xi \geq \xi_Q : \quad \delta M &= +\xi \delta \bar{C} \\ \xi_Q \geq \xi \geq 1 : \quad \delta M &= -(1-\xi) \delta \bar{C} \end{aligned} \quad (\text{Ex. 2-4.10})$$

og

$$\begin{aligned} \omega_Q \delta \bar{C} = & L \int_0^{\xi_Q} \left(-\frac{1}{2}(1+\xi) \xi \frac{\bar{p}L^2}{EI} \right) \left(+\xi \delta \bar{C} \right) d\xi \\ & + L \int_{\xi_Q}^1 \left(-\frac{1}{2}(1+\xi) \xi \frac{\bar{p}L^2}{EI} \right) \left(-(1-\xi) \delta \bar{C} \right) d\xi \end{aligned} \quad (\text{Ex. 2-4.11})$$

som giver (Ex. 2-4.9).

Ex 2-4.2 Bestemmelse af Flytninger i en Statisk Ubestemt Bernoulli-Euler Bjælke

Vort andet eksempel drejer sig om bestemmelse af transversalflytningen og rotationen af punkt Q i den på Fig. Ex. 2-4.3 viste statisk ubestemte bjælke. Når vi igen indfører den dimensionsløse koordinat ξ ved (Ex. 2-4.1) eller (Ex. 2-2.3), kan bøjningsmomentet i bjælken skrives:

$$\begin{aligned} M(\xi) &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-4\xi)\bar{p}L^2 \\ \Rightarrow \quad \kappa(\xi) &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-4\xi) \frac{\bar{p}L^2}{EI} \end{aligned} \quad (\text{Ex. 2-4.12})$$

idet vi også her regner med, at bøjningsstivheden EI er konstant.

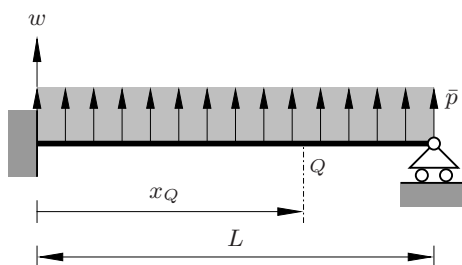


Fig. Ex. 2-4.3: Indspændt-simpelt understøttet bjælke med jævnt fordelt last \bar{p} .

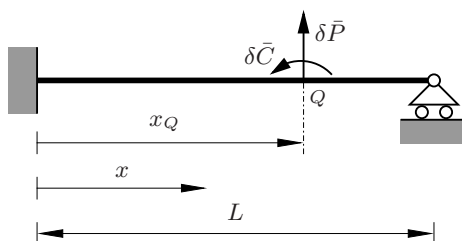


Fig. Ex. 2-4.4: Indspændt-simpelt understøttet bjælke med virtuel punktlast $\delta\bar{P}$ og koncentreret virtuel momentlast $\delta\bar{C}$.

Ex 2-4.2.3 Bestemmelse af Tværubøjning

Som i eksemplet i afsnit Ex 2-4.1 påsætter vi en enkeltkraft $\delta\bar{P}$ i punkt Q , se Fig. Ex. 2-4.4, for at finde flytningen $w_Q = w(x_Q)$. Der er dog her en væsentlig forskel fra det nævnte eksempel, idet vi her har en vis frihed i det virtuelle momentfelt δM fra $\delta\bar{P}$. Det skyldes, at det virtuelle momentfelt δM blot skal opfylde de statiske feltbetingelser og de *statiske* randbetingelser, hvoraf der kun er én i dette tilfælde. Vi kan derfor vælge værdien af det virtuelle moment $\delta M(0)$ helt frit. Det vil være ret nærliggende at vælge det til 0 som i eksemplet i afsnit Ex 2-4.1, dvs. i overensstemmelse med (Ex. 2-4.4). De virtuelle kræfters princip kan stadig skrives som angivet i (Ex. 2-4.5), og for nærværende eksempel får vi:

$$\begin{aligned} w_Q \delta\bar{P} = & L \int_0^{\xi_Q} \left(\frac{1}{8}(1-\xi)(1-4\xi) \frac{\bar{p}L^2}{EI} \right) \left(-(1-\xi_Q)\xi \delta\bar{P}L \right) d\xi \\ & + L \int_{\xi_Q}^1 \left(\frac{1}{8}(1-\xi)(1-4\xi) \frac{\bar{p}L^2}{EI} \right) \left(-(1-\xi)\xi_Q \delta\bar{P}L \right) d\xi \end{aligned} \quad (\text{Ex. 2-4.13})$$

dvs.

$$w_Q = \xi_Q^2(1-\xi_Q)(3-2\xi_Q) \frac{\bar{p}L^4}{48EI} \quad (\text{Ex. 2-4.14})$$

Skønt udbøjningen $w_M = w(L/2)$ her ikke indtager nogen særlig position, udregnes den alligevel for at kunne sammenligne den med værdien fra eksemplet i afsnit Ex 2-4.1:

$$w_M = \frac{1}{192} \frac{\bar{p}L^4}{EI} = \frac{2}{384} \frac{\bar{p}L^4}{EI} \quad (\text{Ex. 2-4.15})$$

som viser, at udbøjningen på midten er faldet til 40% af værdien for den simpelt understøttede bjælke. Udregningen af maksimaludbøjningen w_{\max} er her en smule vanskeligere, idet stedet for denne skal bestemmes ved abscissen ξ_{\max} til nulpunktet for w'_Q . Man finder:

$$\xi_{\max} = \frac{15 - \sqrt{33}}{16} \approx 0.578\,465 \quad (\text{Ex. 2-4.16})$$

og

$$w_{\max} = \frac{39 + 55\sqrt{33}}{65536} \frac{\bar{p}L^4}{EI} \approx 0.005\,416 \frac{\bar{p}L^4}{EI} \quad (\text{Ex. 2-4.17})$$

hvilket vil sige, at maksimaludbøjningen er ca. halvdelen af den tilsvarende størrelse for den simpelt understøttede bjælke.

Ex 2-4.2.4 Nyt Valg af Virtuelt Momentfelt

Skønt det ud fra udledningen af de virtuelle kræfters princip er klart, at det virtuelle momentfelt blot skal tilfredsstille de *statiske* betingelser, kan det være instruktivt at forsøge sig med et andet momentfelt end det, der benyttedes ovenfor.¹⁰ Et ret indlysende valg vil være at vælge den virtuelle reaktion i højre understøtning til 0. Herved fås et trekantformet virtuelt momentfelt:

$$\begin{aligned} 0 \geq \xi \geq \xi_Q : \quad \delta M &= (\xi_Q - \xi)\delta\bar{P}L \\ \xi_Q \geq \xi \geq 1 : \quad \delta M &= 0 \end{aligned} \quad (\text{Ex. 2-4.18})$$

dvs.

$$\begin{aligned} w_Q\delta\bar{P} &= L \int_0^{\xi_Q} \left(\frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - 4\xi) \frac{\bar{p}L^2}{EI} \right) \\ &\quad \times ((\xi_Q - \xi)\delta\bar{P}L) d\xi \end{aligned} \quad (\text{Ex. 2-4.19})$$

hvorved vi genfinder (Ex. 2-4.14). En anden måde at overbevise sig selv om, at det er tilladeligt at vælge det virtuelle indspændingsmoment helt vilkårligt, består i at udregne integralet af κ multipliceret med et virtuelt momentfelt, der forløber lineært mellem den valgte værdi δM_0 af indspændingsmomentet og 0 ved højre understøtning:

$$\delta M = (1 - \xi)\delta M_0 L \quad (\text{Ex. 2-4.20})$$

idet alle statisk mulige virtuelle momentfelter netop kan sammensættes ved addition af δM fra (Ex. 2-4.4) og (Ex. 2-4.20). Altså beregnes:

$$\begin{aligned} w_Q\delta\bar{P} &= L \int_0^1 \left(\frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - 4\xi) \frac{\bar{p}L^2}{EI} \right) \\ &\quad \times ((1 - \xi)\delta M_0) d\xi = 0 \end{aligned} \quad (\text{Ex. 2-4.21})$$

¹⁰At man har en ret stor frihed i valget af virtuelt momentfelt forekommer nok de fleste — blandt andre forfatteren af denne bog — at være umiddelbart fornuftsstridigt.

I grunden kunne vi altså have undværet ovenstående alternative udregning af udbøjningerne, idet et virtuelt indspændingsmoment ikke bidrager. Undertiden kan et simpelt eksempel imidlertid være en god støtte for ens forståelse af et generelt udsagn, hvorfor dette afsnit ikke vurderes værdiløst.

Ex 2-4.2.5 Bestemmelse af Rotation

Til kontrol af det resultat, vi finder ved de virtuelle kræfters princip, finder vi rotationen ω_Q ved differentiation af udtrykket for tværubøjningen, dvs.

$$\omega_Q = \frac{1}{L} \frac{dw_Q}{d\xi} = \xi_Q \left(6 - 15\xi_Q + 8\xi_Q^2 \right) \frac{\bar{p}L^3}{48EI} \quad (\text{Ex. 2-4.22})$$

men vi vil her benytte de virtuelle kræfters princip og påsætter den virtuelle momentlast $\delta\bar{C}$, se Fig. Ex. 2-4.2. Vi vil her gøre livet så nemt som muligt og forudsætter, at den virtuelle reaktion ved højre understøtning er 0, hvorved vi finder det virtuelle momentfelt δM :

$$\begin{aligned} 0 \leq \xi \leq \xi_Q : \quad \delta M &= \delta\bar{C} \\ \xi_Q \leq \xi \leq 1 : \quad \delta M &= 0 \end{aligned} \quad (\text{Ex. 2-4.23})$$

dvs.

$$w_Q \delta\bar{P} = L \int_0^1 \left(\frac{1}{8}(1-\xi)(1-4\xi) \frac{\bar{p}L^2}{EI} \right) (\delta\bar{C}) d\xi = 0 \quad (\text{Ex. 2-4.24})$$

hvorefter (Ex. 2-4.22) genfindes.

2.4 Konklusion

Det burde fremgå af ovenstående, at de to virtuelle arbejders principper, der er gennemgået, kan benyttes til bekvem opnåelse af resultater for retliniede bjælker, såvel for Bernoulli-Euler bjælker som for Timoshenkobjælker, skønt der i eksemplerne alene behandles bjælker af den første slags. Nok så vigtigt er det dog at vide, at de to principper gælder for *alle* typer konstruktioner, fx. stang-, bjælke-, skive-, plade- og skalkonstruktioner. Støder man på en teori, der har tøjnings- og spændingsmål, som ikke er hinandens arbejdskonjugerede, kan man med det samme forkaste teorien, idet ingen af de generelle principper fra de bærende konstruktioners teori i så fald er gyldige for den pågældende teori. Disse generelle principper omfatter blandt andet plasticitetsteoriens ekstremalprincipper (øvre- og nedreværdisætningerne), og elasticitetsteoriens fundamentale principper, såsom minimum af den potentielle og den komplementære energi.

Kapitel 3

Plasticitet for Bjælker og Rammer

3.1 Indledning

3.1.1 Lidt Historie

Et centralt spørgsmål ved design af en bygningskonstruktion er selvfølgelig, om den har den fornødne bæreevne. Med andre ord, om den kan tåle at blive udsat for de aktuelle belastninger uden at bryde sammen. Gennem det 19. og det 20. århundrede udviklede der sig — i hvert fald delvist — rationelle metoder til håndtering af sådanne problemer. Det blev efterhånden almindeligt anerkendt som *nødvendigt*,¹ at der kan angives et system af stangkræfter i gitre og bjælkemomenter i rammer, som kan bære de givne ydre belastninger, og som konstruktionens elementer, dvs. stængerne og bjælkerne, må dimensioneres efter. En sådan *nødvendig* betingelse for konstruktionens bæreevne er strengt taget kun nyttig, hvis man ønsker at rive den ned; hvis betingelsen ikke er opfyldt, bryder konstruktionen sammen. Ønsker man derimod — som det jo oftest er tilfældet — at konstruktionen skal blive stående under de givne ydre belastninger, har man brug for en *tilstrækkelig* betingelse herfor.

For de statisk *bestemte* konstruktioner er der ikke noget problem med hensyn til nødvendighed og tilstrækkelighed, idet de er karakteriseret ved, at der kun findes ét system af stangkræfter eller bjælkemomenter, som er i ligevægt med de ydre belastninger. Vanskelighederne er dermed lokaliseret til de statisk *ubestemte* konstruktioner, som for øvrigt også er de almindeligste. Især for disse konstruktioner er det nødvendigt at beregne konstruktionens deformation, hvilket forudsætter kendskab dens materiale. Tidligere var sådanne beregninger ikke gennemførlige, dels fordi teorierne ikke var udviklet i tilstrækkelig grad, dels fordi — i det omfang teorier var tilgængelige — beregningerne blev så omfat-

¹Med hensyn til *tilstrækkeligt* må læseren væbne sig med en smule tålmodighed.

tende, at de med datidens metoder var uoverkommelige. Derfor støttede man sig i høj grad til allerede indhentede erfaringer, og mangfoldige empiriske formler og beregningsmetoder så dagens lys. Blandt disse metoder var en af de mere fremtrædende den ovenfor omtalte, der går ud på at sikre sig, at der findes blot et enkelt statisk system af stangkræfter eller bjælkemomenter, der kan bære de ydre belastninger, og som ikke overskrider styrken af materialet. Interessant nok har det senere vist sig, at denne metode i mange tilfælde angiver en *nedreværdi* for bæreevnen, se også Afsnit 3.3.3, dvs. en værdi, som er på den sikre side, hvorved den ovenfor omtalte betingelse vedrørende tilstrækkelighed er opfyldt. Hvorvidt en bæreevne, der er beregnet på dette grundlag også udtrykker den reelle bæreevne af konstruktionen, berøres i afsnit 3.1.2.

Ved arbejder af især Gvozdev, Johansen og Prager² fik *plasticitetsteorierne*, blandt andet den ovenfor beskrevne metode, et sikkert teoretisk grundlag. Det blev eftervist, at hvis konstruktionsmaterialet er *idealplastisk*, se Fig. 7-1.3, er metodens resultater på den sikre side. Metodens anvendelse på det specielle — men meget vigtige — tilfælde af bjælker og rammer er emnet for dette kapitel.

3.1.2 Plastiske Bjælker og Rammer

Plasticitetsteori er i sig selv et meget omfattende emne, men hvis vi kun ønsker at behandle bjælker og rammer af idealplastisk materiale, bliver det væsentligt mere begrænset. I det følgende vil vi yderligere forudsætte, at aksialkræfterne er meget mindre end svarende til aksial flydning af bjælkerne eller hvert bjælkeelement i rammerne. Herved bliver beregningerne i princippet ganske enkle, som vi skal se nedenfor.

Vi forudsætter:

Kinematisk
linearitet

1. kinematisk linearitet, dvs. flytningerne er infinitesimale,

Små
aksialkræfter

2. aksialkræfterne er så små, at deres indflydelse på moment-krumningstøjningsrelationen kan negligeres,

3. Med hensyn til materialemodellen vil vi antage:

Lineærelastisk-
idealplastisk
materiale

- (a) enten, at materialet er lineærelastisk-idealplastisk, dvs. det opfører sig lineærelastisk, indtil *flydespændingen* $\pm\sigma_Y$ nås, se den venstre skitse på Fig. 7-1.1, hvorefter materialets stivhed forsvinder og spændingen forbliver konstant lig med flydespændingen,

Stift-
idealplastisk
materiale

- (b) eller, at materialet er stift-idealplastisk, dvs. der findes ikke tøjninger før flydespændingen nås, hvorefter materialets stivhed forsvinder.

²Fra adskillige samtaler med K.W. Johansen ved jeg, at han ville blive meget fortørnet over at blive nævnt i samme åndedræt som Prager, men det får nu være. Når K.W. Johansen ikke kunne undgå at omtale Prager, skete det i reglen ved at han refererede til "Prager og hans bande."

Rimeligheden af disse antagelser skal naturligvis vurderes for hver konstruktion, man behandler, men det kan allerede på dette punkt nævnes, at forudsætningerne 2 og 3b ofte med god tilnærmelse er overholdt for jernbetonrammer, og at forudsætningen 1 i mange tilfælde også er fornuftig for jernbetonrammer, men at det er bydende nødvendigt at retfærdiggøre især denne antagelse for at undgå stabilitetssvigt. I denne forbindelse vil det undertiden være nødvendigt ikke blot at udføre en lineærelastisk stabilitetsanalyse, men en beregning, der ikke alene omfatter kinematisk men også materialemæssig ulinearitet, som for eksempel lineærelastisk-idealplastisk, se Fig. 7-1.1. En dygtig og erfaren ingeniør vil i mange tilfælde — helt uden udregninger — kunne afgøre, om en stabilitetsanalyse er nødvendig.

En af konsekvenserne af forudsætning 2 er, at moment-krumningstøjningsrelationen kommer til at se ud som på Fig. 3-1.1. Det vil i øvrigt senere vise

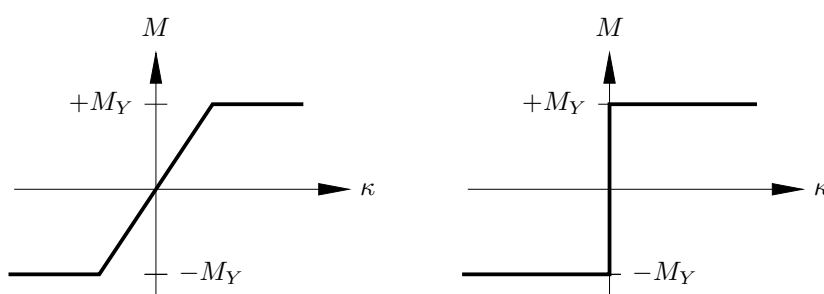


Fig. 3-1.1: Moment-krumningstøjningsrelation for et tværsnit af lineærelastisk-idealplastisk materiale henholdsvis et stift-idealplastiske materiale, begge med samme numeriske værdi af det positive og det negative flydemoment.

sig, at den beregnede bæreevne af en konstruktion er den samme, hvad enten vi forudsætter den ene eller den anden af de to angivne moment-krumningstøjningsrelationer. I hovedparten af de følgende beregninger af bæreevner vil vi derfor forudsætte den stift-idealplastiske materialemodel gældende.

3.2 Indledende Eksempler

I det følgende vil vi gennemgå et antal eksempler af varierende kompleksitet for at introducere forskellige aspekter af emnet flydelastbestemmelse for bjælker og rammer.

Generelt vil belastningerne være givet ved en kendt *form*, som for eksempel en enkeltkraft \bar{P} , to eller flere enkeltkræfter $\bar{P}_j, j = 1, \dots, N$ eller en fordelt belastning $\bar{p}(x)$, som skales ved en *lastparameter* α , hvis største værdi, *flydelastparameteren* α_Y , ønskes bestemt.

Lastparameter α
Flydelastparameter α_Y

Ex 3-1 Simpelt Understøttet Bjælke

Vi kan umiddelbart konstatere, at bjælken er statisk bestemt, hvorfor momentet uafhængigt af moment-krumningstøjningsrelationen er som vist på Fig. Ex. 3-1.1.

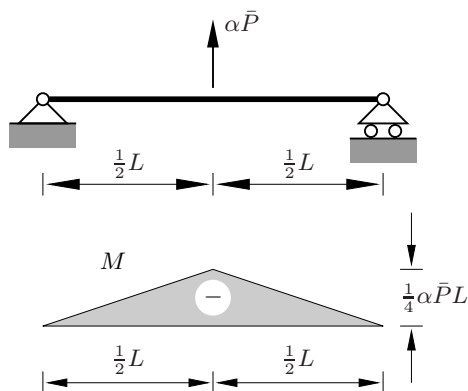


Fig. Ex. 3-1.1: Simpelt understøttet bjælke. Konstruktion og momentkurve.

Uanset om vi som moment-krumningstøjningsrelation vælger den lineærelastisk-idealplastiske eller den stift-idealplastiske fra Fig. 3-1.1,³ vil vi finde, at bæreevnen af den simpelt understøttede bjælke fra Fig. Ex. 3-1.1 er udtømt, når momentet i midten bliver lig med flydemomentet, dvs., når:

$$-\frac{1}{4}\alpha\bar{P}L = -M_Y \quad (\text{Ex. 3-1.1})$$

hvorved flydelastparameteren α_Y er bestemt som:

$$\alpha_Y = 4 \frac{M_Y}{\bar{P}L} \quad (\text{Ex. 3-1.2})$$

Mekanisme
Flydemekanisme

Når værdien af lastparameteren α har nået værdien α_Y , er konstruktionen blevet bevægelig, dvs. den er blevet en *mekanisme*, som ret naturligt kaldes en *flydemekanisme*. Ved udtømt bæreevne af rammer af idealplastisk materiale er konstruktionen omdannet til en mekanisme, eventuelt ikke en totalmekanisme, men en, hvis udstrækning er af lokal karakter som for eksempel en *knudemekanisme*, en *etagemekanisme* eller en *bjælkemekanisme*, se afsnit 3.5.3, afsnit 3.5.1, henholdsvis afsnit 3.5.2.

Ex 3-2 Eksempel: Indspændt-Simpelt Understøttet Bjælke

Ændrer vi de kinematiske — og derved de statiske — forhold for bjælken, så den bliver som på Fig. Ex. 3-2.1, er den ikke længere statisk bestemt, hvorfor vi ikke kan finde momentfordelingen uden anvendelse af den fysiske

³Disse relationer fremgår også af Fig. 7-1.2 og Fig. 7-1.3.

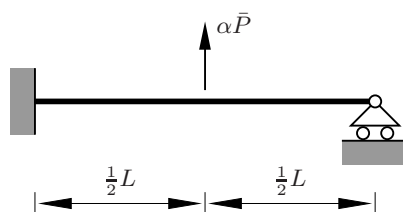


Fig. Ex. 3-2.1: Indspændt-simpelt understøttet bjælke.

betingelse. Vi kan imidlertid sammensætte den endelige momentkurve af et bidrag fra indspændingsmomentet $M(0)$ og fra enkeltkraften påsat den

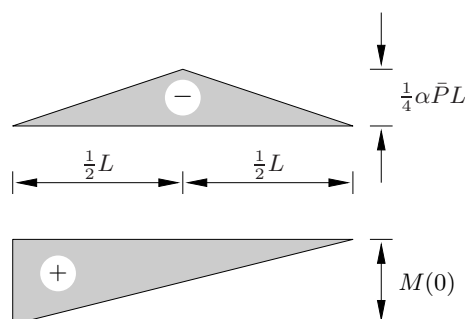


Fig. Ex. 3-2.2: Moment i indspændt-simpelt understøttet bjælke.

tilsvarende simpelt understøttede bjælke. Derfor kan vi med det samme konstatere, at det numerisk set største moment må findes midt på bjælken eller i indspændingen. Hvis vi forudsætter, at bjælken er lineærelastisk-idealplastisk, er momentfordelingen indtil den første flydning karakteriseret ved:

$$M(0) = +\frac{6}{32}\alpha\bar{P}L \quad \text{og} \quad M(L/2) = -\frac{5}{32}\alpha\bar{P}L \quad (\text{Ex. 3-2.1})$$

Hvis de positive og negative flydemomenter har samme numeriske værdi M_Y , må den første flydning altså optræde ved indspændingen. Efter flydning ved indspændingen er:

$$M(0) = +M_Y \quad \text{og} \quad M(L/2) = +\frac{1}{2}M_Y - \frac{1}{4}\alpha\bar{P}L \quad (\text{Ex. 3-2.2})$$

Den anden flydning vil optræde midt på bjælken, når:

$$M(L/2) = -M_Y \implies -M_Y = +\frac{1}{2}M_Y - \frac{1}{4}\alpha\bar{P}L \quad (\text{Ex. 3-2.3})$$

dvs. når:

$$\alpha = 6\frac{M_Y}{\bar{P}L} \quad (\text{Ex. 3-2.4})$$

Flydelastparameter α_Y

hvorefter bæreevnen er udtømt, idet bjælken er blevet bevægelig og derfor ikke kan præstere yderligere modstand mod lasten.

Altså er flydelasten $\alpha_Y \bar{P}$, og værdien af flydelastparameteren α_Y er:

$$\alpha_Y \bar{P} = 6 \frac{M_Y}{L} \quad \text{og} \quad \alpha_Y = 6 \frac{M_Y}{\bar{P}L} \quad (\text{Ex. 3-2.5})$$

Ved sammenligning med resultatet (Ex. 3-1.2) ses, at indspændingen er meget effektiv, idet flydelasten er hævet med 50% i forhold til den simpelt understøttede bjælke.

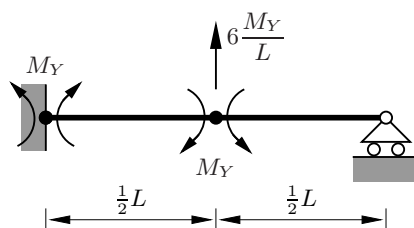


Fig. Ex. 3-2.3: Flydemekanisme.

Mekanisme

Flydemekanisme

Indtil nu har det været indlysende, hvor flydningerne ville optræde. Graden af kinematisk overbestemthed⁴ har i begge tilfælde været én mindre end antallet af maksimum- eller minimummomenter — i det første tilfælde var graden 0 og i det andet 1, og antallet af mulige flydeled var 1 henholdsvis 2. Aktivisering af de mulige *flydeled* ville derfor netop omdanne bjælken til en *mekanisme*, dvs. et bevægeligt system.

Af ret indlysende årsager kaldes denne specielle form for mekanisme for en *flydemekanisme*. For den indspændt-simpelt understøttede bjælke med én enkeltkraft som belastning fremgår flydemekanismen af Fig. Ex. 3-2.3. Så enkelt som her stiller sagen sig ikke altid, hvilket vi ser på i det følgende.

At forholdene kan blive mere komplicerede end ovenfor, kan vi kan overbevise os selv om ved at betragte Fig. 3-2.2. I denne situation er der 3 mulige flydeled, nemlig ved indspændingen og under de to enkeltkræfter, og der skal kun bruges 2 flydeled for at omdanne konstruktionen til en mekanisme. I øvrigt kan vi nok på forhånd have en fornemmelse af, at forholdet mellem størrelsen og placeringen af de to enkeltkræfter må være betydningsfuldt for mekanismen. Selv for givne værdier af disse forhold mangler vi derfor et kriterium til udvælgelse af placeringen af de to nødvendige flydeled. I princippet kunne vi foretage en beregning, hvor vi lod værdien af lastparameteren α stige, indtil det første flydeled optrådte, hvorefter vi så øgede α , indtil den anden, og dermed sidste, flydning indfandt sig. En anden mulighed kunne bestå i at antage, at 2 af de mulige flydeled var aktive og beregne værdien af α for hver af disse situationer. Selv i dette ret simple eksempel skulle man igennem 3 sådanne beregninger, hvorefter man

⁴Graden af kinematisk overbestemthed er den samme som graden af statisk ubestemthed.

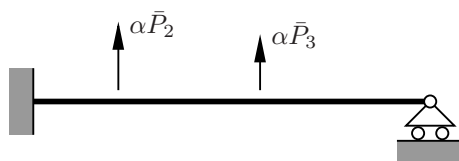


Fig. 3-2.2: Indspændt-simpelt understøttet bjælke med to enkeltkræfter.

stadig mangler et kriterium til bestemmelse til at vælge den rigtige — er det for eksempel den laveste værdi af α , der er den rigtige? Selv hvis dette spørgsmål er besvaret, skal der næppe megen fantasi til at forestille sig, at regnearbejdet ved de ovenfor opridsede mulige beregningsmetoder for mere komplicerede konstruktioner — som for eksempel rammer — med mange lastkomponenter ville blive helt uoverkommeligt, i hvert tilfælde, hvis det skulle udføres i hånden.

Som vi skal se i det følgende findes der heldigvis relativt enkle metoder til at bestemme den rigtige *flydemekanisme*.

3.3 Øvre- og Nedreværdisætningerne Extrema

Til bestemmelse af den korrekte flydemekanisme kan man benytte to sætninger, som udledes i det følgende, nemlig *Øvre værdisætningen* og *Nedreværdisætningen*. Som vi skal se senere i dette afsnit, danner øreværdien α^+ og nedreværdien α^- *extrema* for flydelastparameteren α_Y . Disse sætninger kan også anvendes til opnåelse af tilnærmede værdier af flydelasten i de tilfælde, hvor den eksakte værdi enten ikke kan bestemmes eller er for besværlig at opnå.

Vi skal tage udgangspunkt i Eksempel Ex 3-2, men betoner, at udledningerne har almen gyldighed.

3.3.1 Mekanismer, Mulige og Tilladelige Felter

Nedenstående indføres tre vigtige begreber, nemlig mekanismer⁵ samt mulige og tilladelige felter.

Mekanismer

Ved en *mekanisme* vil vi forstå en konstruktion, der er én eller flere gange bevægelig, dvs. konstruktioner, der er én eller flere gange kinematisk underbestemt. Vi skal kun interessere os for mekanismer, der netop er én gang kinematisk underbestemt, idet vi vil justere lastparameterens størrelse, så konstruktionen kan være i ligevægt.

Blandt de forskellige mekanismer indtager *flydemekanismen* en særlig position, idet det er denne mekanisme, der medfører, at konstruktionens bæreevne er udtømt.

⁵Begrebet mekanisme er indført tidligere i forbindelse med de simple eksempler, men jeg har skønnet, at det er formålstjenligt at medtage definitionen her.

Øreværdisætningen
Nedreværdisætningen
Extrema

Mekanisme

For fuldstændighedens skyld nævnes, at en konstruktion, der er n gange kinematisk underbestemt, er n gange statisk overbestemt. Det er denne egenskab, der tillader os at fastsætte lastparameteren α som beskrevet ovenfor — havde vi valgt en mekanisme, der var mere end én gang statisk overbestemt, ville lastparameteren α ikke kunne bestemmes entydigt.

Mulige Felter

Muligt felt

Tillægsordet mulig anvendes i forbindelse med såvel statiske som kinematiske felter. Det betegner felter, der overholder alle tilhørende betingelser. Et muligt statisk felt tilfredsstiller således alle statiske betingelser (både felt- og randbetingelser), og et muligt kinematisk felt overholder tilsvarende alle kinematiske betingelser (igen, både felt- og randbetingelser). Der udsiges intet om de fysiske betingelser.

Tilladelige Felter

Tilladeligt felt

Betegnelsen tilladelig hæftes alene på statiske felter, der dels er mulige, dels overholder de fysiske betingelser, hvilket i denne sammenhæng betyder, at bøjningsmomentet intet sted overskrider flydemomentet.

3.3.2 Korrekt Flydemekanisme

Flydemekanisme

Vi vil antage, at den korrekte flydemekanisme er som vist på Fig. 3-3.3 — normalt vil vi selvfølgelig ikke kende den på forhånd, men vi skal blot benytte den som reference. Det er vigtigt at bemærke, at i forbindelse med nedenstående beregninger er flytningerne infinitesimale i alle mekanismer, hvilket blandt andet implicerer, at sinus til en indgående vinkel er lig med vinklen selv.

I det følgende skal vi benytte informationer om den korrekte flydemekanisme og dens tilhørende momentfelt, se Fig. 3-3.3.

Nedenfor, som i afsnit 7.1.2, refererer øvre indicering ⁽⁺⁾ og ⁽⁻⁾ på flydemomenterne til flydemomentets fortegn — husk, at det positive flydemoment ikke nødvendigvis numerisk set er lig med det negative.

3.3.3 Nedreværdi — Antaget Snitkraftfelt

Nedreværdi

Vi vil skønne et snitkraftfelt, der overholder de statiske og fysiske betingelser, dvs. momenterne er i ligevægt med de påsatte belastninger og overholder de statiske randbetingelser, og momentet overskrider intet sted flydemomentet, se Fig. 3-3.4. Snitkraftfeltet er således både *muligt* og *tilladeligt*. I dette tilfælde vil der generelt set ikke findes en mekanisme, der svarer til det skønnede momentfelt, idet momentfeltet i reglen ikke vil indeholde tilstrækkeligt mange punkter, hvor momentet er lig med flydemomentet.

Her benytter vi i de virtuelle flytningers princip⁶ den korrekte flydemekanismes flytningsfelt dels sammen med det korrekte momentfelt dels med det skønnede, hvilket er i overensstemmelse med forudsætningerne for anvendelse

⁶I andre sammenhænge benytter man ikke de virtuelle flytningers princip, men taler om reelle arbejds hastigheder, hvor variationen af en størrelse er udskiftet med hastigheden af den samme størrelse. I nærværende sammenhæng ville dette kræve introduktion af yderligere begreber, hvilket næppe ville lette tilegnelsen af stoffet.

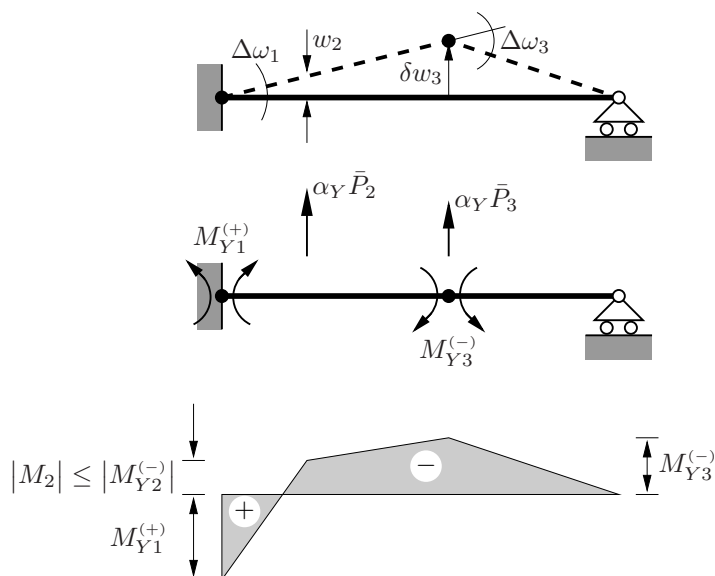


Fig. 3-3.3: Korrekt flydemekanisme med tilhørende momentfelt. Flydeledene er markeret som fyldte cirkler. Bemærk, at flytningerne er infinitesimale.

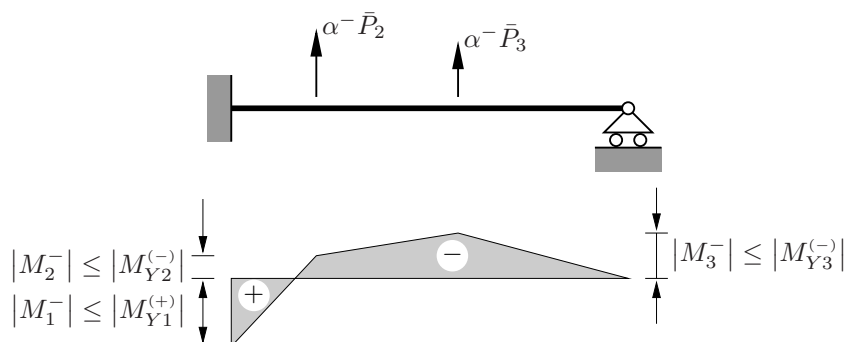


Fig. 3-3.4: Antaget snitkraftfelt til benyttelse ved nedreværdibestemmelse.

af de virtuelle flytningers princip, idet flytningsfeltet og begge momentfelter er mulige.

Ved opstilling af de virtuelle flytningers princip skal der tages hensyn til det virtuelle arbejde i knæpunkterne, hvilket i øvrigt er det eneste indre arbejde, idet der ikke forekommer krumningstøjninger andre steder. Den letteste måde at bestemme bidraget fra knæpunkterne består i at erkende, at den gensidige

vinkeldrejning i et knæpunkt i realiteten er en koncentreret krumningstøjning. Det er derfor, at det virtuelle arbejde i et flydeled bliver positivt, skønt moment og vinkeldrejning øjensynligt er modsatrettede her, se for eksempel (3.1) i forbindelse med Fig. 3-3.3.

Først benytter vi den korrekte flydemekaniskes flytningsfelt fra Fig. 3-3.3 i de virtuelle flytningers princip sammen med det korrekte momentfelt fra Fig. 3-3.3. For at tydeliggøre, at vi anvender de virtuelle flytningers princip, har vi foranstillet et δ ved alle kinematiske størrelser. Herved finder vi:

$$\alpha_Y \bar{P}_2 \delta w_2 + \alpha_Y \bar{P}_3 \delta w_3 = M_{Y1}^{(+)} \delta \Delta \omega_1 + M_{Y3}^{(-)} \delta \Delta \omega_3 \quad (3.1)$$

eller

$$\alpha_Y \sum_j \bar{P}_j \delta w_j = \sum_m M_{Ym} \delta \Delta \omega_m \quad (3.2)$$

Derefter anvender vi de virtuelle flytningers princip med den korrekte flydemekaniskes flytningsfelt fra Fig. 3-3.3 sammen med momentfeltet fra Fig. 3-3.4:

$$\alpha^- \bar{P}_2 \delta w_2 + \alpha^- \bar{P}_3 \delta w_3 = M_1^- \delta \Delta \omega_1 + M_3^- \delta \Delta \omega_3 \quad (3.3)$$

hvor $M_j^-, j = 1, \dots, 3$, overholder de betingelser, der fremgår af Fig. 3-3.4. Mere generelt udtrykt bliver (3.3):

$$\alpha^- \sum_j \bar{P}_j \delta w_j = \sum_m M_m^- \delta \Delta \omega_m \quad (3.4)$$

Subtraherer vi (3.4) fra (3.2), finder vi:

$$(\alpha_Y - \alpha^-) \sum_j \bar{P}_j \delta w_j = \sum_m (M_{Ym} - M_m^-) \delta \Delta \omega_m \quad (3.5)$$

Da nu $|M_m^-| \leq |M_{Ym}|$, kan vi konstatere, at:

$$(\alpha_Y - \alpha^-) \sum_j \bar{P}_j \delta w_j \geq 0 \quad (3.6)$$

Altså er:

$$\alpha^- \leq \alpha_Y \quad (3.7)$$

Herved har vi bevist *Nedreværdisætningen*, der udsiger, at ved i de virtuelle flytningers princip at benytte et skønnet momentfelt, der er statisk muligt og tilladeligt, finder man en værdi α^- af lastparameteren α , der er mindre end eller lig med den korrekte værdi α_Y . De bæreevner, man finder ved benyttelse af nedreværdisætningen, er derfor på den sikre side.

3.3.4 Øvreværdi — Antaget Flydemekanisme

Her kan vi benytte et virtuelt flytningsfelt, der er affint med den antagne flydemekanisme, se Fig. 3-3.5. Med hensyn til det statiske felt hørende til den antagne mekanisme er der et problem, idet vi skal sikre os, at det er statisk til-ladeligt, altså at det tilfredsstiller ligevægtsligningerne. I denne forbindelse kan

Øvreværdi

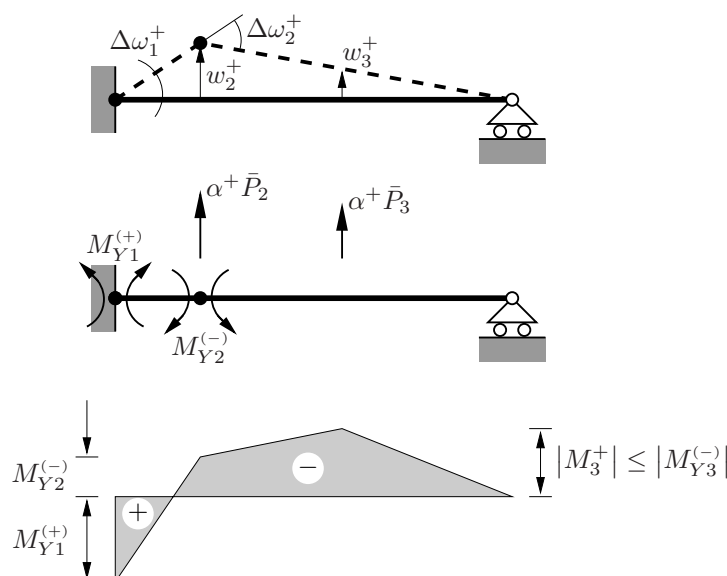


Fig. 3-3.5: Antaget flydemekanisme til benyttelse ved øvre-værdibestemmelse.

det være formålstjenligt at betragte flydemomenterne som ydre belastninger. Konstruktionen belastes således af flydemomenterne i de antagne flydeled og af den egentlige ydre last, som er proportional med lastparameteren α . På basis af den antagne mekanisme finder vi en værdi α^+ af lastparameteren, som netop sørger for, at belastningen holder ligevægt med mekanismens flydemomenter. Da en bjælke altid er *indre* statisk bestemt, vil den ydre ligevægt af mekanismens bjælker medføre, at den indre ligevægt i mekanismen er sikret overalt, hvorfor vi kan konstatere, at momentfeltet i selve mekanismen er statisk muligt. I resten af konstruktionen er momentfeltets egenskaber egentligt ikke interessante, idet der i det virtuelle flytningsfelt, vi vælger senere, ikke her forekommer virtuelle tøjninger og derfor intet indre virtuelt arbejde, se nedenfor. Imidlertid kan vi indse, at også her er momentfeltet muligt, idet denne del af konstruktionen er statisk bestemt eller statisk ubestemt, hvorfor den på statisk mulig måde kan optage en vilkårlig belastning. Dette er muligt, medmindre vi har skønnet en mekanisme, der medfører for stor grad af bevægelighed, dvs. mekanismen er mere end én gang kinematisk underbestemt eller, hvad der er det samme, én gang

statisk overbestemt. En sådan mekanisme er ubrugelig, idet man i så fald ikke ville kunne fastlægge en entydig værdi af lastparameteren, da der i realiteten ville være tale om to eller flere uafhængige mekanismer. Imidlertid vil man visse tilfælde kunne finde mekanismer, der er lineært uafhængige, og som medfører samme øvre værdi. I så fald vil enhver linearkombination af disse mekanismer give samme øvre værdi. Dette er således tilfældet, hvis belastningen $\frac{3}{2}\bar{P}$ i nedenstående eksempel, se eksempel Ex 3-3, Fig. Ex. 3-3.1, udskiftes med $2\bar{P}$. Sker dette, vil begge de skønnede mekanismer give værdien $\alpha^+ = 3$, som i øvrigt så er lig med flydeværdien α_Y .

For god ordens skyld pointeres, at momentfeltet svarende til den skønnede mekanisme kun vil være tilladeligt, såfremt vi har gættet på den korrekte flyde-mekanisme.

Først benytter vi flytningsfeltet fra Fig. 3-3.5 i de virtuelle flytningers princip sammen med det korrekte momentfelt fra Fig. 3-3.3, hvorved vi finder:

$$\alpha_Y \bar{P}_2 \delta w_2^+ + \alpha_Y \bar{P}_3 \delta w_3^+ = M_{Y1}^{(+)} \delta \Delta \omega_1^+ + M_2 \delta \Delta \omega_2^+ \quad (3.8)$$

hvor vi atter har foranstillet et δ ved alle kinematiske størrelser.

Mere generelt kan vi skrive (3.8) som:

$$\alpha_Y \sum_j \bar{P}_j \delta w_j^+ = \sum_k M_k \delta \Delta \omega_k^+ \quad (3.9)$$

Vi vil nu anvende de virtuelle flytningers princip med såvel momentfeltet som flytningsfeltet fra Fig. 3-3.3 — det sidste atter med foranstillet δ ved alle kinematiske størrelser. Herved får vi:

$$\alpha^+ \bar{P}_2 \delta w_2^+ + \alpha^+ \bar{P}_3 \delta w_3^+ = M_{Y1}^{(+)} \delta \Delta \omega_1^+ + M_{Y2}^{(-)} \delta \Delta \omega_2^+ \quad (3.10)$$

eller

$$\alpha^+ \sum_j \bar{P}_j \delta w_j^+ = \sum_k M_{Yk} \delta \Delta \omega_k^+ \quad (3.11)$$

Subtraherer vi (3.9) fra (3.11), finder vi:

$$(\alpha^+ - \alpha_Y) \sum_j \bar{P}_j \delta w_j^+ = \sum_k (M_{Yk} - M_k) \delta \Delta \omega_k^+ \quad (3.12)$$

Da nu $|M_k| \leq |M_{Yk}|$, kan vi konstatere, at:

$$(\alpha^+ - \alpha_Y) \sum_j \bar{P}_j \delta w_j^+ \geq 0 \quad (3.13)$$

Endvidere er $\sum \bar{P}_j \delta w_j^+ > 0$, medmindre vi har valgt flytningsvariationen, så det totale ydre og indre virtuelle arbejde bliver negative, hvilket ville medføre fortegnsskift i de fleste led. Hvad enten vi har valgt flytningsvariationen

“fornuftigt” eller ej, giver (3.13):

$$\alpha^+ \geq \alpha_Y \quad (3.14)$$

Herved har vi bevist *Øvreværdisætningen*, der udsiger, at ved at benytte en skønnet flydemekanisme i de virtuelle flytningers princip finder man en værdi α^+ af lastparameteren α , der er større end eller lig med den korrekte værdi α_Y . Sagt på en anden måde, er de bæreevner man finder ved benyttelse af øvreværdisætningen på den usikre side.

3.3.5 Øvreværdisætningen versus Nedreværdisætningen

Umiddelbart skulle man altid foretrække nedreværdisætningen frem for øvreværdisætningen, men til håndregning viser det sig, at det er meget lettere at skønne mekanismer end gode momentfelter,⁷ der overholder alle nødvendige betingelser. Til computerberegninger er nedreværdisætningen derimod normalt at foretrække, idet man kan formulere problemet som et standard lineært programmeringsproblem, til hvis løsning der findes et væld af programmer.

I det følgende vil vi alene benytte øvreværdisætningen til at skaffe os tilnærmede løsninger, men undertiden vil vi anvende nedreværdisætningen til at forbedre eller checke en løsning, der er baseret på øvreværdisætningen.

3.4 Eksempler på Anvendelse af Øvre- og Nedreværdisætningerne

I det følgende vil vi diskutere et par eksempler på anvendelse af de to ekstremalprincipper, nemlig øvre- og nedreværdisætningerne.

Ex 3-3 Statisk Ubestemt Bjælke med To Enkeltkræfter.

Vi betragter den på Fig. Ex. 3-3.1 viste konstruktion, som er én gang statisk ubestemt — kinematisk overbestemt. Da momentfeltet i dette tilfælde altid

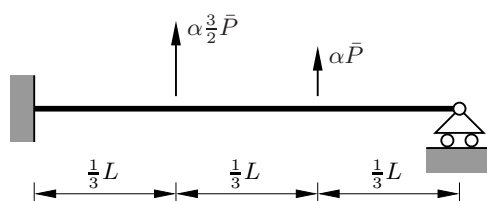


Fig. Ex. 3-3.1: Indspændt-simpelt understøttet bjælke med konstant flydemoment $M_Y^+ = M_Y^- = M_Y$.

forløber lineært mellem understøtningerne og de påsatte belastninger, samt

⁷Med “gode momentfelter” skal her forstås momentfelter, der ligger tæt ved det eksakte.

lineært mellem disse, er der kun mulighed for flydning i indspændingen og under de to belastninger. Belastningsenheden \bar{P} er givet ved:

$$\bar{P} \equiv \frac{M_Y}{L} \quad (\text{Ex. 3-3.1})$$

Ex 3-3.1 Anvendelse af Øvreværdisætningen

Da konstruktionen er én gang statisk ubestemt — én gang kinematisk overbestemt, skal en mekanisme indeholde to flydede, der må findes i indspændingen eller under de påsatte belastninger. Da der er mulighed for tre flydede, og konstruktionen er én gang kinematisk overbestemt, er der netop to lineært uafhængige mekanismer, som eventuelt skal kombineres for at give flydemekanismen.

I de følgende udledninger vil vi atter foranstille et δ ved alle kinematiske størrelser, når vi benytter de virtuelle flytningers princip.

Ex 3-3.1.1 Første Skønnede Mekanisme

Denne mekanisme fremgår af Fig. Ex. 3-3.2. På basis af dette virtuelle flyt-

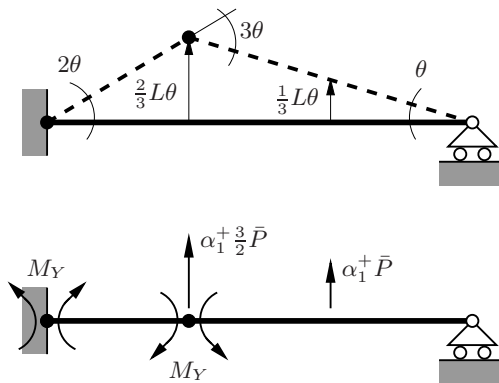


Fig. Ex. 3-3.2: Første antagne mekanisme.

ningsfelt giver de virtuelle flytningers princip:

$$\alpha_1^+ \frac{3}{2} \bar{P} \frac{2}{3} L \delta\theta + \alpha_1^+ \bar{P} \frac{1}{3} L \delta\theta = M_Y 2\delta\theta + M_Y 3\delta\theta \quad (\text{Ex. 3-3.2})$$

hvorved

$$\alpha_1^+ = \frac{15}{4} = 3.75 \quad (\text{Ex. 3-3.3})$$

Ex 3-3.1.2 Anden Skønnede Mekanisme

Med mekanismen fra Fig. Ex. 3-3.3 finder vi nu:

$$\alpha_2^+ \frac{3}{2} \bar{P} \frac{1}{3} L \delta\theta + \alpha_2^+ \bar{P} \frac{2}{3} L \delta\theta = M_Y \delta\theta + M_Y 3\delta\theta \quad (\text{Ex. 3-3.4})$$

dvs.

$$\alpha_2^+ = \frac{24}{7} = 3.43 < \alpha_1^+ \quad (\text{Ex. 3-3.5})$$

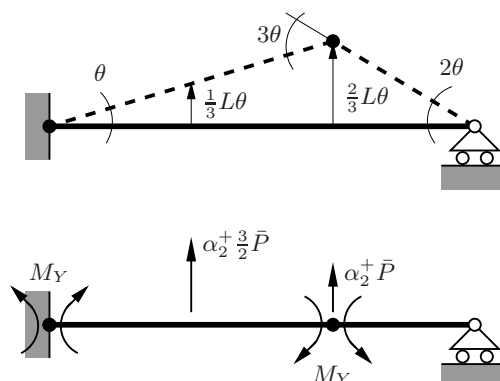


Fig. Ex. 3-3.3: Anden antagne mekanisme.

Ex 3-3.1.3 Kontrol af Anden Skønnede Mekanisme

Umiddelbart vil vi konkludere, at $\alpha_2^+ = \alpha_Y$, men for at sikre, at dette virkelig er tilfældet, bør vi kontrollere, at værdien af momentet under lasten til venstre ikke overstiger flydemomentet — her er dette ret nemt at gøre på flere forskellige måder, men af hensyn til mere komplicerede situationer vil vi benytte en fremgangsmåde, der ofte er den mest fordelagtige. Vi vil benytte flytningsfeltet fra den først antagne mekanisme i de virtuelle flytningers princip:

$$\alpha_2^+ \frac{3}{2} \bar{P} \frac{2}{3} L \delta\theta + \alpha_2^+ \bar{P} \frac{1}{3} L \delta\theta = M_Y 2\delta\theta - M_2^+ 3\delta\theta \quad (\text{Ex. 3-3.6})$$

Altså er:

$$M_2^+ = -\frac{6}{7} M_Y, \quad \text{dvs. } |M_2^+| < M_Y \quad (\text{Ex. 3-3.7})$$

Vi har nu vist, at $|M^+| \leq M_Y$ overalt, hvorfor den anden skønnede mekanisme er flydemekanismen, og:

$$\alpha_Y = \alpha_2^+ = \frac{24}{7} \quad (\text{Ex. 3-3.8})$$

Ex 3-4 Statisk Ubestemt Bjælke med Fordelt Belastning

I eksemplet afsnit Ex 3-3 vidste vi på forhånd ikke alene hvor mange flydeled, der skulle til for at danne en mekanisme, men vi vidste også hvor flydeleddene kunne findes. Dette er ikke tilfældet, når den påsatte last ikke alene består af enkeltkræfter, men er fordelt, se Fig. Ex. 3-4.1. Skønt det for denne konstruktion ikke er vanskeligt at bestemme den nøjagtige placering af flydeleddene, hvoraf det ene nødvendigvis må findes i indspændingen og det andet et sted i feltet, vil vi anvende en iterativ metode, som med fordel kan anvendes i mere komplicerede situationer.

Belastningsenheden \bar{p} er her givet ved:

$$\bar{p} \equiv \frac{M_Y}{L^2} \quad (\text{Ex. 3-4.1})$$

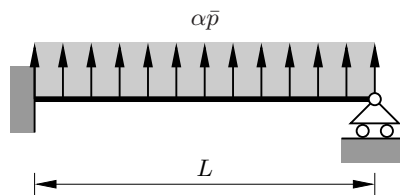


Fig. Ex. 3-4.1: Indspændt-simpelt understøttet bjælke med konstant flydemoment $M_Y^+ = M_Y^- = M_Y$.

Ex 3-4.1 Anvendelse af Øvre- og Nedreværdisætningen

Opgaven, som i høj grad består af at bestemme placeringen af flydeleddet i feltet, vil vi her løse tilnærmet ved anvendelse af Øvreværdisætningen.

Ex 3-4.1.1 Første Skønnede Mekanisme

Denne mekanisme fremgår af Fig. Ex. 3-4.2.

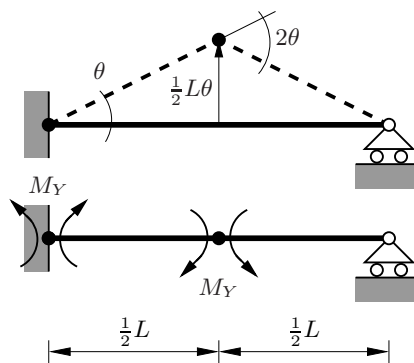


Fig. Ex. 3-4.2: Første antagne mekanisme.

Ex 3-4.1.2 Anvendelse af Øvreværdisætningen

På basis af dette virtuelle flytningsfelt giver de virtuelle flytningers princip:

$$\alpha_1^+ \bar{p} L \frac{1}{4} L \delta \theta = M_Y \delta \theta + M_Y 2 \delta \theta \quad (\text{Ex. 3-4.2})$$

idet resultanten af belastningen flyttes $\frac{1}{4}L\delta\theta$. Herved bliver:

$$\alpha_1^+ = 12 \quad (\text{Ex. 3-4.3})$$

Ex 3-4.1.3 Kontrol af Første Skønnede Mekanisme

Vi må forvente, at den fysiske betingelse ikke er overholdt overalt og udregner derfor bøjningsmomentet i bjælken under forudsætning af, at lastfaktoren er $\alpha_1^+ = 12$. Vi vil her benytte de virtuelle flytningers princip med det flytningsfelt, der fremgår af Fig. Ex. 3-4.3.

Vi finder:

$$\alpha_1^+ \bar{p} L \frac{1}{2} \eta L \delta \theta = M_Y \delta \theta - M(\eta) \frac{1}{1-\eta} \delta \theta \quad (\text{Ex. 3-4.4})$$

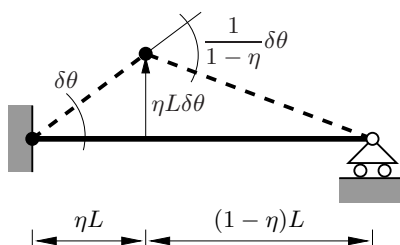


Fig. Ex. 3-4.3: Flytningsfelt til bestemmelse af moment i bjælken.

dvs.

$$M(\eta) = (1-\eta)(1-3\eta)M_Y \quad (\text{Ex. 3-4.5})$$

For $\eta = \frac{1}{2}$ giver (Ex. 3-4.5) $M(\eta) = -M_Y$, som forventet. Differentiation med hensyn til η af (Ex. 3-4.5) giver:

$$M'(\eta) = (12\eta - 7)M_Y \quad (\text{Ex. 3-4.6})$$

dvs., at den numerisk set største værdi af momentet findes for $\eta = \frac{7}{12}$, og værdien er:

$$M\left(\frac{7}{12}\right) = -\frac{25}{24}M_Y \quad (\text{Ex. 3-4.7})$$

Ex 3-4.1.4 Anvendelse af Nedreværdisætningen

Da det fundne momentfelt tilfredsstiller ligevægtsligningerne, kan vi benytte det som basis for en nedreværdi, idet vi ganske enkelt multiplicerer momentfeltet og lastfaktoren med $\frac{24}{25}$, hvorved momentfeltet ikke alene bliver statisk muligt, men også statisk tilladeligt. Herved har vi fundet nedreværdien α_1^- :

$$\alpha_1^- = \frac{24}{25} \cdot 12 = 11.520 \quad (\text{Ex. 3-4.8})$$

Altså kan vi konstatere, at:

$$11.520 \leq \alpha_Y \leq 12 \quad (\text{Ex. 3-4.9})$$

Vælger vi middelværdien af α_1^- og α_1^+ , nemlig:

$$\tilde{\alpha}_1 = 11.760 \quad (\text{Ex. 3-4.10})$$

vil den relative fejl være mindre end eller lig med ca. 2%, hvilket til mange formål er tilfredsstillende.

Ex 3-4.2 Anden Skønnede Mekanisme

Som basis for en — forhåbentlig — forbedret mekanisme vil vi antage, at flydeleddet i feltet ligger i afstanden $\frac{7}{12}L$ fra indspændingen, altså hvor det numerisk set maksimale moment fra den først antagne mekanisme optræder, se Fig. Ex. 3-4.4.

Ex 3-4.2.7 Anvendelse af Nedreværdisætningen på Anden Skønnede Mekanisme

Vi kan nu finde, at:

$$\alpha_2^- = \frac{28560}{28561} \cdot \frac{408}{35} = \frac{332928}{28561} = 11.656\,735 \quad (\text{Ex. 3-4.18})$$

og derfor er:

$$11.656\,735 \leq \alpha_Y \leq 11.657\,143 \quad (\text{Ex. 3-4.19})$$

hvilket er et så snævert interval, at det er tilstrækkeligt til alle formål.

Ex 3-4.3 Korrekt Flydemekanisme

Den korrekte flydemekanisme kan i dette tilfælde bestemmes relativt enkelt. Vi tager udgangspunkt i Fig. Ex. 3-4.3 og opstiller de virtuelle flytningers princip:

$$\alpha \bar{p} L \frac{1}{2} \eta L \delta \theta = M_Y \delta \theta - M_Y \frac{1}{1-\eta} \delta \theta \quad (\text{Ex. 3-4.20})$$

dvs.

$$\alpha = \frac{2(2-\eta)}{\eta(1-\eta)} \quad (\text{Ex. 3-4.21})$$

Differentiation med hensyn til η giver:

$$\frac{d\alpha}{d\eta} = \frac{2(-\eta^2 + 4\eta - 2)}{\eta^2(1-\eta)^2} \quad (\text{Ex. 3-4.22})$$

Ved at kræve $d\alpha/d\eta = 0$ findes:

$$\eta = 2 - \sqrt{2} = 0.585\,786\,438 \quad (\text{Ex. 3-4.23})$$

som giver den mindst mulige øreværdi, som netop er lig med flydelastparameter α_Y :

$$\alpha_Y = \frac{2}{3 - 2\sqrt{2}} = 11.656\,854 \quad (\text{Ex. 3-4.24})$$

Middelværdien af α_2^+ og α_2^- er 11.656 939, som ses at ligge meget tæt på α_Y .

3.5 Flydelast af Rammer — Grundmekanismer

I forbindelse med beregning af almindelige rammekonstruktioner er det praktisk at opdele de mulige mekanismer i tre kategorier, nemlig knudemekanismer, etagemekanismer og bjælkemekanismer. Vi vil illustrere disse ved et eksempel på en ramme, som fremgår af Fig. 3-5.6.

Disse grundmekanismer, som i sig selv ofte giver uantageligt dårlige øreværdier, skal især benyttes ved anvendelse af mekanismekombinationsmetoden, som introduceres i afsnit 3.6.

I eksempel Ex 3-5 bestemmes flydelasten for en konkret ramme efter denne metode.

Knude-, etage- og bjælke-mekanismer

Grundmekanismer

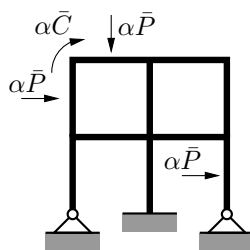


Fig. 3-5.6: Eksempel på ramme med belastninger.

3.5.1 Etagemekanismer

Etagemekanisme

Hvor en ramme har en etage, skal man medtage etagemekanismer ved benyttelse af mekanismekombinationsmetoden, se i øvrigt Fig. 3-5.7. Med hensyn til

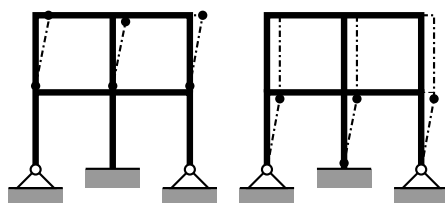


Fig. 3-5.7: Etagemekanismer. Læg mærke til, at flydeledene ved samlinger med mere end to tilstødende bjælker i knuden ligger umiddelbart uden for denne.

placeringen af det øverste venstre flydeled i den venstre mekanisme henvises til ovenstående kommentarer under afsnit 3.5.2.

Det er nok værd at pointere, at etagerne ikke behøver at stå vinkelret på benene eller være vandret.

3.5.2 Bjælke mekanismer

Bjælke mekanisme

Som det ses af Fig. 3-5.8, og som navnet antyder, er en bjælke mekanisme begrænset til en enkelt bjælke. Denne type mekanisme er mulig i bjælker, der

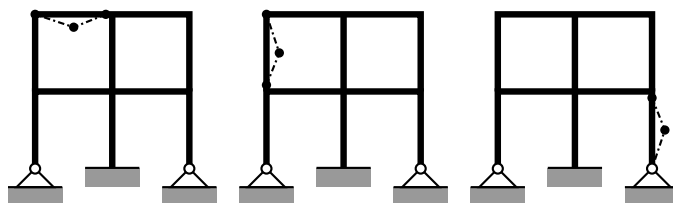


Fig. 3-5.8: Bjælke mekanismer. Læg mærke til, at flydeledene ved samlinger med mere end to tilstødende bjælker i knuden ligger umiddelbart uden for denne.

er udsat for tværlast, der ikke nødvendigvis består af enkeltkræfter, men også fordelte belastninger. Når bjælkemekanismen til venstre skal kombineres med knudemekanismen til venstre på Fig. 3-5.9, skal det venstre flydeled i bjælkemekanismen antages at ligge umiddelbart til højre for knuden, så dette flydeled kan lukkes ved kombinationen. Et tilsvarende forhold gælder, når den midterste bjælkemekanisme skal kombineres med den samme knudemekanisme.

3.5.3 Knudemekanismer

En knudemekanisme er i sin natur anderledes end de to andre grundmekanismer, etagemekanismerne og bjælkemekanismerne, se afsnit 3.5.1 henholdsvis afsnit 3.5.2, idet den alene består af en rotation af en knude, hvorfor der ikke

Knudemekanisme

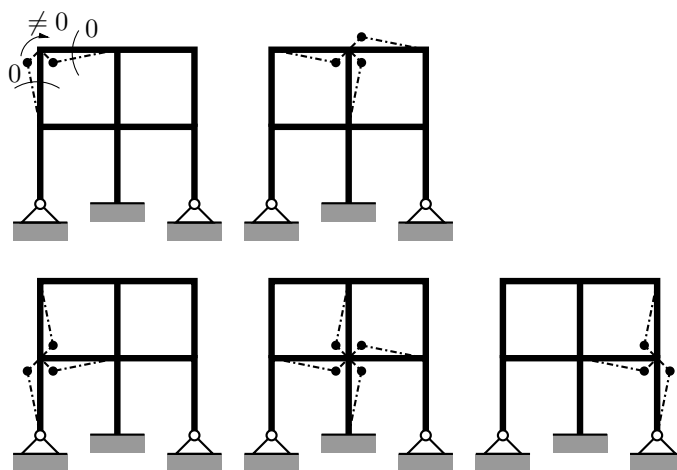


Fig. 3-5.9: Knudemekanismer. Læg mærke til, at ved knuder med mere end to tilstødende bjælker og ved belastede knuder ligger flydeleddene umiddelbart uden for knuden. Imidlertid er flydeleddene af hensyn til overskueligheden tegnet, som om de sidder for enden af en kort arm. Der forekommer derfor ikke rotationer af de tilstødende bjælker.

forekommer rotation af de tilstødende bjælker, skønt det at dømme ud fra Fig. 3-5.9 kunne se således ud. Når flydeleddene her er tegnet, som om de sad på en kort arm, er det alene af tegningsmæssige årsager. Det er værd at bemærke, at der altid er mulighed for en knudemekanisme, hvor flere end to bjælker er tilknyttet samme knude. Dette er tilfældet uanset, om knuden er belastet af et moment. Dette forhold er måske ikke indlysende, men da en sådan knudemekanisme skal benyttes ved kombination med andre mekanismer, kan den aktiveres af de andre mekanismer.

3.6 Mekanismekombinationsmetoden

Mekanismekom-
binationsmetode

Beregningsgangen i mekanismekombinationsmetoden gennemgås nedenfor, men i øvrigt henvises til eksempel Ex 3-5.

Antal mulige
flydeled

A. Antal mulige flydeled

Antallet m af mulige flydeled optælles.

Grad af statisk
ubestemthed

B. Grad af kinematisk overbestemthed

Graden n af kinematisk overbestemthed, som er lig med graden af statisk ubestemthed, fastlægges.

Antal
uafhængige
mekanismer

C. Antal uafhængige mekanismer

Antallet l af uafhængige mekanismer er lig med $m - n$, eftersom der for hver kinematisk overbestemthed fordres netop ét flydeled til at gøre konstruktionen kinematisk bestemt.

Analyse af de
uafhængige
mekanismer

D. Analyse af de uafhængige mekanismer

Alene fordi det ikke på forhånd kan udelukkes, at en af de uafhængige mekanismer faktisk er flydemekanismen, skal de analyseres, og de tilhørende øvreværdier beregnes.

Kombinationer
af de
uafhængige
mekanismer

E. Kombinationer af de uafhængige mekanismer

Ved en vilkårlig kombination af de uafhængige mekanismer vil det ydre og indre virtuelle arbejde blot fremstå som den samme kombination af de indgående mekanismers virtuelle arbejder, *medmindre* der elimineres et eller flere flydeled ved kombinationen. Ifald der ikke elimineres noget flydeled ved kombinationen, vil den kombinerede mekanismes øvreværdi blot være en linearkombination af de indgående mekanismers øvreværdier, hvorved der altså ikke kan opnås nogen forbedring.

Ved en kombination, som indebærer, at der elimineres flydeled, er den kombinerede mekanismes ydre virtuelle arbejde uberørt af lukningen, medens det indre virtuelle arbejde bliver mindre, hvorved der er mulighed for, at øvreværdien hørende til den kombinerede mekanisme bliver mindre end den mindste af de indgående mekanismers øvreværdi.

Der gøres altså kun fremskridt, såfremt der elimineres — “lukkes” — flydeled ved kombinationerne.

Med hensyn til bestemmelse af de uafhængige mekanismer står man sig som oftest ved at vælge grundmekanismer af de typer, der er beskrevet i afsnit 3.5. Herved er det ganske nemt at sikre sig, at mekanismerne rent faktisk er uafhængige. Vælger man mere komplicerede mekanismer, for eksempel ud fra en ide om, at de er mere sandsynlige, kan man meget vel komme i en situation, hvor to eller flere af mekanismerne ikke er uafhængige.

I tilfælde, hvor tre eller flere bjælker er forbundet til en knude, der ikke er belastet med et ydre moment, vil den tilsvarende knudemekanisme have øvreværdien ∞ , se afsnit 3.5.3 og Fig. 3-5.9, som naturligvis i sig selv ikke er interessant. Det kunne da synes tillokkende at udelukke en sådan mekanisme fra de grundmekanismer, man vil behandle, og vælge en, der giver en endelig øvreværdi, men da knudemekanismen blot skal benyttes til kombinationer, betyder dette mindre end hensynet til uafhængighed.

F. Bestemmelse af den mindste øvreværdi

Den mindste øvreværdi bestemmes.

Bestemmelse af
den mindste
øvreværdi

G. Kontrol af at fysikken er overholdt

Da det ikke er sikkert, at man ved ovenstående fremgangsmåde har fundet flydemekanismen, skal man kontrollere, om fysikken er overholdt overalt, dvs., at momentet ikke noget sted overskrider flydemomentet.

Kontrol af at
fysikken er
overholdt

Hvis flydemomentet kun er overskredet meget lidt, kan man skalere den fundne mindste øvreværdi i overensstemmelse hermed, se også afsnit Ex 3-4. Hvis der er tale om en væsentlig overskridelse, bør man søge efter en bedre kombination.

I stort set alle tilfælde, der indebærer fordelte belastninger, vil man ikke kunne finde flydemekanismen helt nøjagtigt, men må benytte sig af fremgangsmåden med nedskalering af en øvreværdi og dens tilhørende momentfelt.

H. Konstatning af, at den mindste øvreværdi også hører til flydemekanismen

Såfremt fysikken er overholdt, kan vi konstatere, at den fundne mindste øvreværdi også er flydelastparameteren. Hvis ikke, skal vi søge efter en mindre øvreværdi eller benytte nedreværdisætningen til at finde et — forhåbentlig — tilstrækkelig lille interval for flydelastparameteren, se afsnit Ex 3-4.

Mindste
øvreværdi hører
også til
flydemekanismen

Ex 3-5 Analyse af Ramme ved Mekanismekombinationsmetoden

Vi vil benytte mekanismekombinationsmetoden på den ramme, der er vist på Fig. Ex. 3-5.1.

Lastenheden \bar{P} er givet ved:

$$\bar{P} \equiv \frac{M_Y}{L} \quad (\text{Ex. 3-5.1})$$

Ex 3-5.A Antal mulige flydeled

Der er altid mulighed for flydeled ved en indspænding, under en belastning, samt ved en knude med 3 eller flere tilstødende bjælker. Der er derfor i alt

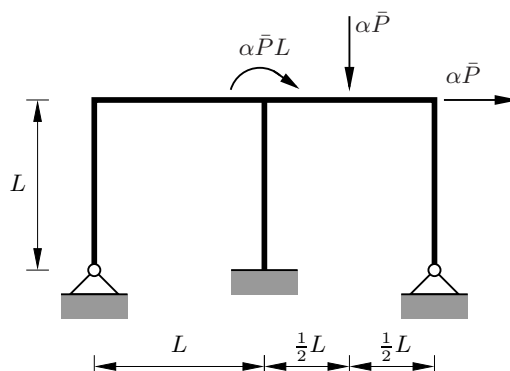


Fig. Ex. 3-5.1: Ramme af stift-plastisk materiale.

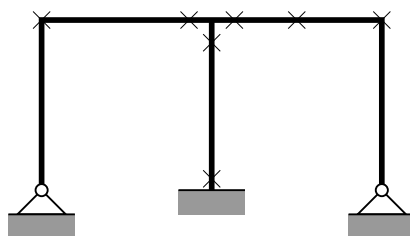


Fig. Ex. 3-5.2: Mulige flydeled er angivet ved kryds. Bemærk, at flydeleddene ved indspændingen og ved den midterste knude ligger helt tæt på knuden, men at de af praktiske årsager er tegnet i en endelig afstand.

$m = 7$ mulige flydeled, nemlig 1 ved indspændingen, 1 ved hvert af de to hjørner, 1 under lasten, samt 3 ved midterknuden.

$$m = 7 \quad (\text{Ex. 3-5.2})$$

Ex 3-5.B Grad af kinematisk overbestemthed

Den letteste måde at bestemme graden n af kinematisk overbestemthed består formentlig i at løsskære konstruktionen ved de to simple understøtninger, hvorved 4 kinematiske bånd ophæves, medens konstruktionen er blevet kinematisk bestemt. Altså:

$$n = 4 \quad (\text{Ex. 3-5.3})$$

Ex 3-5.C Antal uafhængige mekanismer

Antallet l af uafhængige mekanismer er:

$$l = m - n = 3 \quad (\text{Ex. 3-5.4})$$

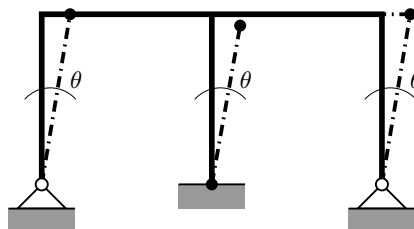
Ex 3-5.D Analyse af de uafhængige mekanismer**Ex 3-5.D-a Etagemekanisme**

Fig. Ex. 3-5.3: Etagemekanisme. Bemærk, at flydeledet i det midterste ben ligger helt tæt på knuden, men at det af praktiske årsager er tegnet i en endelig afstand.

De virtuelle flytningers princip med flytningsfeltet fra Fig. Ex. 3-5.3 giver:

$$\alpha_a^+ \bar{P} L \delta \theta = 4 M_Y \delta \theta \quad (\text{Ex. 3-5.5})$$

hvorved

$$\alpha_a^+ = 4 \quad (\text{Ex. 3-5.6})$$

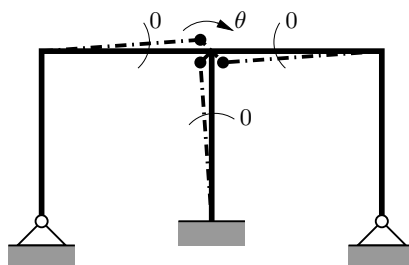
Ex 3-5.D-b Knudemekanisme

Fig. Ex. 3-5.4: Knudemekanisme. Bemærk, at flydeledene ligger helt tæt på knuden, men at de af praktiske årsager er tegnet i en endelig afstand.

De virtuelle flytningers princip med flytningsfeltet fra Fig. Ex. 3-5.4 giver:

$$\alpha_b^+ \bar{P} L \delta \theta = 3 M_Y \delta \theta \quad (\text{Ex. 3-5.7})$$

hvorved

$$\alpha_b^+ = 3 \quad (\text{Ex. 3-5.8})$$

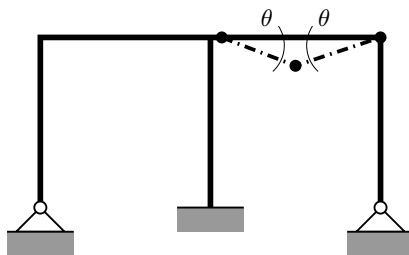


Fig. Ex. 3-5.5: Bjælke mekanisme. Bemærk, at venstre flydeled ligger helt tæt på knuden, men at det af praktiske årsager er tegnet i en endelig afstand.

Ex 3-5.D-c Bjælke mekanisme

De virtuelle flytningers princip med flytningsfeltet fra Fig. Ex. 3-5.5 giver:

$$\alpha_c^+ \bar{P} \frac{1}{2} L \delta \theta = 4 M_Y \delta \theta \quad (\text{Ex. 3-5.9})$$

hvorved

$$\alpha_c^+ = 8 \quad (\text{Ex. 3-5.10})$$

For god ordens skyld bemærkes, at det ikke altid er tilfældet, at der vil optræde én af hver af de tre typer grundmekanismer. Ofte vil en af grundmekanismetyperne ikke indgå, eller en anden type vil optræde flere gange. Således ville der for eksempel være 2 bjælke mekanismer i dette eksempel, hvis et af benene havde været udsat for tværbelastning.

Ex 3-5.E Kombinationer af de uafhængige mekanismer

Husk, at der kun gøres fremskridt, såfremt der lukkes flydeled ved kombinationerne.

Ex 3-5.E-d Kombination af etage- og knudemekanisme

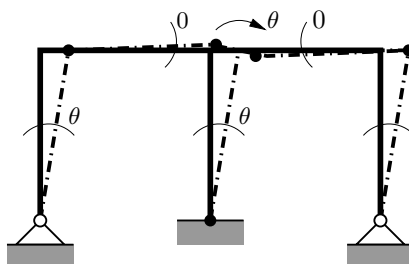


Fig. Ex. 3-5.6: Kombination af etage- og knudemekanisme.

De virtuelle flytningers princip med flytningsfeltet fra Fig. Ex. 3-5.6 giver:

$$\alpha_d^+ \bar{P} L \delta \theta + \alpha_c^+ \bar{P} L \delta \theta = 5 M_Y \delta \theta \quad (\text{Ex. 3-5.11})$$

hvorved

$$\alpha_d^+ = \frac{5}{2} = 2.5 \quad (\text{Ex. 3-5.12})$$

Vi har nu gjort fremskridt, idet denne værdi foreløbig er den mindste.

Ex 3-5.E-e Kombination af bjælke- og knudemekanisme

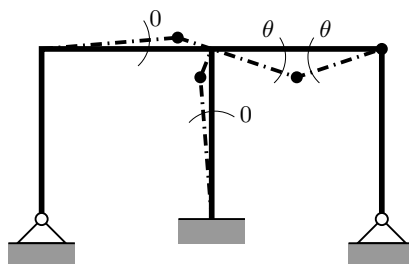


Fig. Ex. 3-5.7: Kombination af bjælke- og knudemekanisme.

De virtuelle flytningers princip med flytningsfeltet fra Fig. Ex. 3-5.7 giver:

$$\alpha_e^+ \bar{P} \frac{1}{2} L \delta \theta + \alpha_e^+ \bar{P} L \delta \theta = 5 M_Y \delta \theta \quad (\text{Ex. 3-5.13})$$

hvorved

$$\alpha_e^+ = \frac{10}{3} = 3.33 \quad (\text{Ex. 3-5.14})$$

Ex 3-5.E-f Kombination af etage-, bjælke- og knudemekanisme

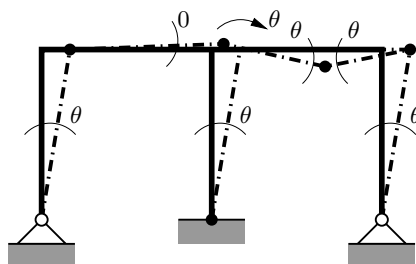


Fig. Ex. 3-5.8: Kombination af etage-, bjælke- og knudemekanisme.

De virtuelle flytningers princip med flytningsfeltet fra Fig. Ex. 3-5.8 giver:

$$\alpha_f^+ \bar{P} L \delta \theta + \alpha_f^+ \bar{P} \frac{1}{2} L \delta \theta + \alpha_f^+ \bar{P} L \delta \theta = 7 M_Y \delta \theta \quad (\text{Ex. 3-5.15})$$

hvorved

$$\alpha_f^+ = \frac{14}{5} = 2.8 \quad (\text{Ex. 3-5.16})$$

Ex 3-5.F Bestemmelse af den mindste øvreværdi

Den mindste øvreværdi er:

$$\alpha_d^+ = \frac{5}{2} = 2.5 \quad (\text{Ex. 3-5.17})$$

Ex 3-5.G Kontrol af at fysikken er overholdt

Opgaven består nu i at konstatere, om momentfeltet hørende til mekanisme d er tilladeligt. Da momenterne varierer lineært på de ubelastede stræk-

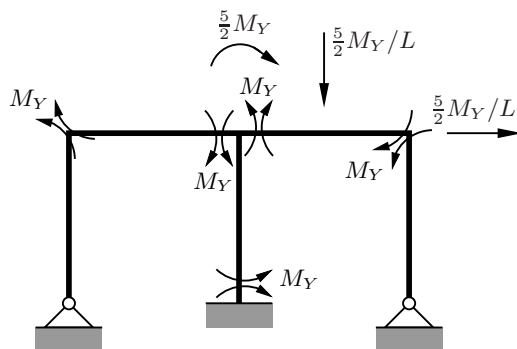


Fig. Ex. 3-5.9: Belastninger og flydemomenter for $\alpha_d^+ = \frac{5}{2}$.

ninger, kan vi umiddelbart konkludere, at vi blot behøver at bestemme to momenter ud over de på Fig. Ex. 3-5.9 angivne, nemlig under den lodrette last og umiddelbart under den midterste knude. Der er flere måder, hvorpå vi kan gennemføre disse beregninger, men som oftest viser det sig lettest at benytte de virtuelle flytningers princip med et af flytningsfelterne hørende til de ovenfor bestemte øvreværdier.

Til bestemmelse af momentet M_P under den lodrette last kan vi anvende flytningsfeltet fra bjælkemekanismen, se Fig. Ex. 3-5.5. Når vi regner M_P positivt for tryk i oversiden finder vi:

$$\frac{5M_Y}{2L} \frac{1}{2} L \delta\theta = -M_Y \delta\theta + M_P 2\delta\theta + M_Y \delta\theta \quad (\text{Ex. 3-5.18})$$

dvs.

$$M_P = \frac{5}{8} M_Y, \quad |M_P| \leq M_Y \quad (\text{Ex. 3-5.19})$$

Momentet M_K under den midterste knude, regnet positivt for tryk til venstre bestemmes lettest ved anvendelse af knudemekanismens flytningsfelt, se Fig. Ex. 3-5.4:

$$\frac{5}{2} M_Y \delta\theta = +2M_Y \delta\theta - M_K \delta\theta \quad (\text{Ex. 3-5.20})$$

dvs.

$$M_K = -\frac{1}{2} M_Y, \quad |M_K| \leq M_Y \quad (\text{Ex. 3-5.21})$$

Ex 3-5.H Konstatering af, at den mindste øvreværdi også hører til flydemekanismen

Da alle momenter numerisk set er mindre end eller lig med flydemomentet, kan vi konstatere, at:

$$\alpha_Y = \alpha_d^+ = \frac{5}{2} \quad (\text{Ex. 3-5.22})$$

og vi har derfor fundet den rigtige flydelast.

3.7 Udbøjning ved Flydebruddets Indtræden

Ud over selve værdien af flydelasten vil udbøjningernes størrelse ved flydebruddets indtræden også være interessant. Det kan meget vel være tilfældet, at det ikke er bæreevnen, karakteriseret ved flydelasten, der er den egentlige dimensionsgivende parameter, men hensynet til, at udbøjningerne ikke overskrider en eller anden (normfastlagt) værdi.

Med hensyn til beregningen af flytningerne ved flydebruddets indtræden bemærkes, at man i princippet altid kan øge lasten trinvis, se for eksempel afsnit Ex 3-2, indtil et nyt flydeled er dannet. På denne måde findes tilvæksterne i flytningerne fra det ene lasttrin til det næste. Ved addition af alle tilvæksterne kan man så finde det endelige flytningsfelt. Til denne fremgangsmåde bemærkes, at anvendelse af mekanismekombinationsmetoden ikke giver megen mening, hvis man alligevel foretager en trinsvis beregning af konstruktionens respons, og at den ved mange flydeled bliver så omfattende, at beregningerne ikke kan foretages i hånden. Det vil derfor være naturligt at søge efter andre metoder til bestemmelse af flytningerne ved flydebruddets indtræden. Vi skal diskutere en sådan med udgangspunkt i eksemplet fra afsnit Ex 3-2.

Ex 3-6 Benyttelse af de Virtuelle Kræfters Princip til Bestemmelse af Flytningerne ved Flydebruddets Indtræden

Flydemekanismen hørende til den indspændt-simpelt understøttede bjælke fra afsnit Ex 3-2 er vist på Fig. Ex. 3-2.3. Under forudsætning af, at materialet er lineærelastisk-idealplastisk, er det her ikke vanskeligt at beregne belastningens flytning ved flydebruddets indtræden, idet vi fra afsnit Ex 3-2 ved, at det sidst dannede flydeled findes under lasten. Umiddelbart før flydebruddets indtræden vil bjælken derfor have det statisk bestemte system,⁸ der fremgår af Fig. Ex. 3-6.1.

Til bestemmelse af den "karakteristiske flytning," dvs. flytningen af lasten, kan vi anvende de virtuelle kræfters princip med den virtuelle last $\delta \bar{P}$ og tilhørende virtuelt momentfelt δM , der fremgår af Fig. Ex. 3-6.2.

⁸Umiddelbart før flydebruddets indtræden vil en konstruktion altid være statisk bestemt, når undtages tilfælde af lidt patologisk karakter, hvor flere flydeled dannes til sidst.

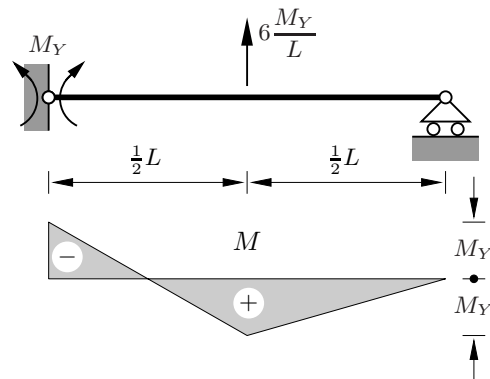


Fig. Ex. 3-6.1: Korrekt statisk system umiddelbart før flydebruddets indtræden med tilhørende momentfelt.

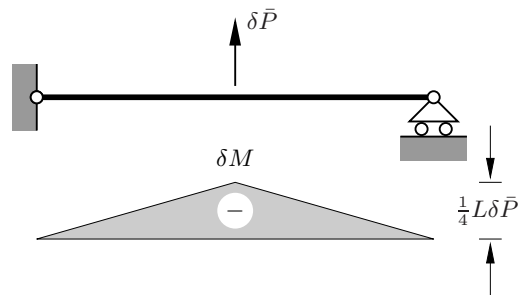


Fig. Ex. 3-6.2: Korrekt statisk system med virtuel last $\delta \bar{P}$ og tilhørende virtuelt momentfelt.

3.7.1 Korrekt Statisk System Umiddelbart før Flydebruddets Indtræden

Når vi erindrer, at krumningstøjningen er lig med momentet M divideret med bøjningsstivheden EI , finder vi ved benyttelse af de virtuelle kræfters princip den eksakte værdi w_P^{Eksakt} af flytningen af kraften ved:

$$w_P^{\text{Eksakt}} \delta \bar{P} = \int_0^L \frac{M}{EI} \delta M dx \quad (\text{Ex. 3-6.1})$$

som efter en triviell beregning giver:

$$w_P^{\text{Eksakt}} = \frac{1}{16} \frac{M_Y L}{EI} \quad (\text{Ex. 3-6.2})$$

hvor det er udnyttet, at δM er proportional med $\delta \bar{P}$.

3.7.2 Antaget Statisk System Umiddelbart før Flydebruddets Indtræden

I nærværende sammenhæng kendte vi det korrekte statiske system ved flydebruddets indtræden, hvilket ikke er tilfældet, hvis vi har bestemt flydelast

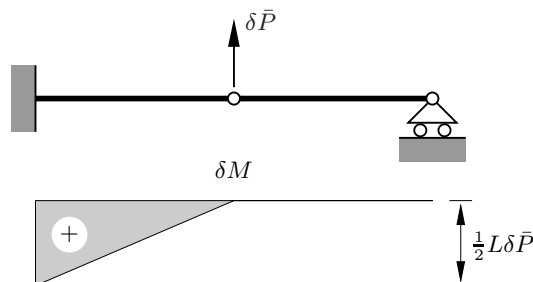


Fig. Ex. 3-6.3: Andet statiske system med virtuel last $\delta \bar{P}$ og tilhørende virtuelt momentfelt.

sten ved anvendelse af mekanismekombinationsmetoden. I så fald har man ikke anden mulighed end efter tur at antage, at hver enkelt flydeled er det sidst dannede og udregne værdien af den karakteristiske flytning på dette grundlag. Der melder sig imidlertid det problem, at man skal finde et kriterium for udvælgelse af den korrekte antagelse. Vi skal dog udsætte dette spørgsmål til efter behandlingen af vort eksempel.

Antager vi nu, at flydeledet under lasten dannes først, skal vi benytte det virtuelle last-momentfelt, der fremgår af Fig. Ex. 3-6.3. De virtuelle kræfters princip giver da:

$$w_P^{\text{Antaget}} \delta \bar{P} = \int_0^L \frac{M}{EI} \delta M dx \quad (\text{Ex. 3-6.3})$$

som, igen efter en triviell beregning, giver:

$$w_P^{\text{Antaget}} = \frac{1}{24} \frac{M_Y L}{EI} \quad (\text{Ex. 3-6.4})$$

Med hensyn til antagelse om sidst dannet flydeled skulle vi altså i dette tilfælde vælge den antagelse, der medførte den største værdi af den karakteristiske flytning.

3.8 Postulat med Hensyn til Sidst Dannet Flydeled

På basis af eksemplet i afsnit Ex 3-6 ledes vi til det postulat, at den antagelse, der medfører den største værdi af den karakteristiske flytning, er den korrekte.

Medmindre man anvender argumenter af antropomorf karakter, viser det sig ganske vanskeligt at bevise eller blot sandsynliggøre rigtigheden af ovenstående postulat, som i øvrigt skal tages med et gran salt, især når belastningen består af mange komponenter. Imidlertid viser postulatet sig i de fleste tilfælde at

være et rimeligt anvendeligt udgangspunkt for bestemmelsen af flytningerne ved flydebruddets indtræden.

3.9 En Vinkeldrejningsformel

I stedet for at benytte de virtuelle kræfters princip til bestemmelse af flytningerne, se Afsnit 3.7, kan man undertiden med fordel anvende en fremgangsmåde, der baseres på en vinkeldrejningsformel, der udledes nedenfor.

Ideen er ganske enkel, idet man blot skal gøre sig klart, at kun i de punkter, hvor der optræder flydeled, kan rotationerne af de tilstødende bjælker være forskellige, medens der i alle andre punkter må være rotationskontinuitet.

For at beregne rotationerne af bjælkeenderne opsplittes disse i tre bidrag, nemlig et fra drejningen af bjælken som stift legeme, et fra lasten på bjælken under forudsætning af simple understøtninger i begge ender, samt et der stammer fra endemomenterne. Når disse bidrag lægges sammen, kan man finde den endelige værdi af bjælkeendernes rotation.

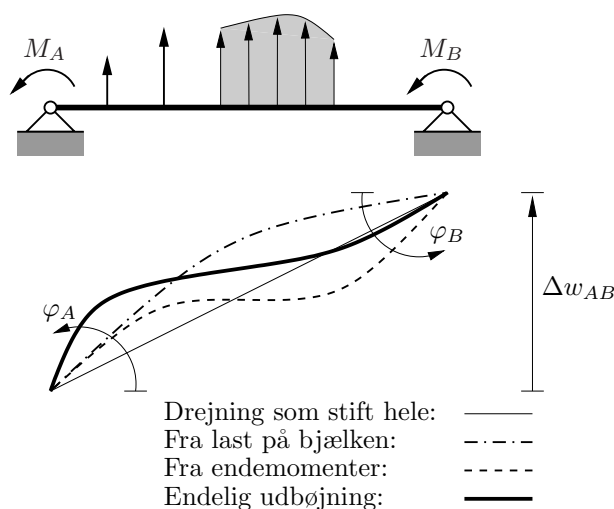


Fig. 3-9.10: Belastninger og endemomenter på bjælke.

Endemomenterne og -rotationerne regnes positive mod uret.

Bjælke deformation opdelt i bidrag.

Flytningerne er stærkt overdrevne — husk, at de er infinitesimale.

Bidragene φ_A^0 og φ_B^0 til rotationerne φ_A og φ_B fra last mellem bjælkeenderne kan naturligvis ikke findes uden oplysninger om belastningernes størrelse og fordeling. De to øvrige bidrag kan derimod beregnes helt generelt. Drejningen som stift hele findes ved en triviell kinematisk betragtning, medens bidragene fra endemomenterne bestemmes ved løsning af simple lineærelastiske bjælkeproble-

mer. De totale rotationer fremgår af (3.15):

Bidrag fra	φ_A	φ_B
Drejning som stift hele	$\frac{\Delta w_{AB}}{L}$	$\frac{\Delta w_{AB}}{L}$
Last på bjælker	φ_A^0	φ_B^0
Endemomenter	$\frac{L}{6EI} (2M_A - M_B)$	$\frac{L}{6EI} (2M_B - M_A)$
Totale rotationer	$\frac{\Delta w_{AB}}{L} + \varphi_A^0 + \frac{L}{6EI} (2M_A - M_B)$	$\frac{\Delta w_{AB}}{L} + \varphi_B^0 + \frac{L}{6EI} (2M_B - M_A)$

(3.15)

Vi vil benytte (3.15) til at bestemme udbøjningerne ved flydebruddets indtræden for den samme konstruktion som i afsnit Ex 3-6.

Ex 3-7 Benyttelse af en Vinkeldrejningsformel til Bestemmelse af Flytningerne ved Flydebruddets Indtræden

Vi ønsker at benytte (3.15) fra afsnit 3.9 til bestemmelse af flytningerne ved flydebruddets indtræden. Til dette formål anvender vi flydemekanismen, som den fremgår af Fig. Ex. 3-2.3 og Fig. Ex. 3-7.1. Vi opstiller først formler for rotationerne under forudsætning af, at alle flydeled er aktive, hvorefter vi antager, at et af flydeleddene er dannet sidst og udregner den tilhørende værdi af flytningen af lasten. Herefter gentages beregningen under forudsætning af, at det andet flydeled dannes sidst, og den numerisk set største værdi af flytningen antages at være den korrekte, se afsnit 3.8.

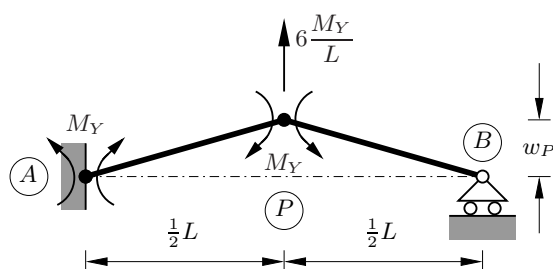


Fig. Ex. 3-7.1: Flydemekanisme.

Da der ikke virker belastninger på strækningerne mellem flydeleddene, simplificeres beregningerne noget, se (3.15).

I virkeligheden består det største problem nu i at holde rede på fortegnet af de forskellige bidrag til rotationerne.

Vi finder:

$$\begin{aligned}\varphi_{AP} &= +\frac{w_P}{L/2} + \frac{L/2}{6EI} \left((-2M_Y) - (-M_Y) \right) \\ \varphi_{PA} &= +\frac{w_P}{L/2} + \frac{L/2}{6EI} \left((-2M_Y) - (-M_Y) \right) \\ &\quad + 2\frac{w_P}{L} - \frac{1}{12} \frac{M_Y L}{EI} \quad (\text{Ex. 3-7.1}) \\ \varphi_{PB} &= -\frac{w_P}{L/2} + \frac{L/2}{6EI} \left((+2M_Y) - (0) \right) \\ \varphi_{BP} &= -\frac{w_P}{L/2} + \frac{L/2}{6EI} \left((0) - (+M_Y) \right)\end{aligned}$$

dvs.

$$\begin{aligned}\varphi_{AP} &= +2\frac{w_P}{L} - \frac{1}{12} \frac{M_Y L}{EI}, \quad \varphi_{PA} = +2\frac{w_P}{L} - \frac{1}{12} \frac{M_Y L}{EI} \\ \varphi_{PB} &= -2\frac{w_P}{L} + \frac{2}{12} \frac{M_Y L}{EI}, \quad \varphi_{BP} = -2\frac{w_P}{L} - \frac{1}{12} \frac{M_Y L}{EI}\end{aligned} \quad (\text{Ex. 3-7.2})$$

Værdien af φ_{BP} er medtaget for fuldstændighedens skyld, og fordi rotationen ved understøtningen kan være en lige så dimensionsgivende parameter som udbøjningen under lasten.

Ex 3-7.1 Første Antagelse: Flydeleddet ved Indspændingen Dannes Sidst

Hvis flydeleddet ved indspændingen dannes sidst, betyder det, at $\varphi_{AP} = 0$, dvs.:

$$\begin{aligned}\varphi_{AP} &= 0 \\ \implies +2\frac{w_P}{L} - \frac{1}{12} \frac{M_Y L}{EI} &= 0 \quad (\text{Ex. 3-7.3}) \\ \implies w_P^{(1)} &= \frac{1}{24} \frac{M_Y L^2}{EI}\end{aligned}$$

som ses at stemme med den værdi, der fandtes ved benyttelse af de virtuelle kræfters princip, se (Ex. 3-6.4).

Ex 3-7.2 Anden Antagelse: Flydeleddet Under Kraften Dannes Sidst

Her er betingelsen, at $\varphi_{PA} = \varphi_{PB}$, dvs.:

$$\begin{aligned}\varphi_{PA} &= \varphi_{PB} \\ \implies +2\frac{w_P}{L} - \frac{1}{12} \frac{M_Y L}{EI} &= -2\frac{w_P}{L} + \frac{2}{12} \frac{M_Y L}{EI} \quad (\text{Ex. 3-7.4}) \\ \implies w_P^{(2)} &= \frac{1}{16} \frac{M_Y L^2}{EI}\end{aligned}$$

som stemmer overens med den korrekte værdi, se (Ex. 3-6.2).

3.10 Bestemmelse af Udbøjning ved de Virtuelle Kræfters Princip Versus Benyttelse af en Vinkeldrejningsformel

I mange tilfælde vil det være noget af en smagssag, om man foretrækker at bestemme udbøjningerne ved flydebruddets indtræden ved anvendelse af de virtuelle kræfters princip eller ved benyttelse af vinkeldrejningsformlen. Det bør dog bemærkes, at anvendelse af de virtuelle kræfters princip medfører, at man skal benytte et nyt statisk system som grundlag for hver enkelt ny antagelse. Anvender man vinkeldrejningsformlen, gælder de opstillede udtryk for rotationerne for alle antagelser, og man skal blot sætte rotationer eller gensidige rotationer lig med nul efter tur, hvorfor denne beregningsmetode har den fordel, at den er noget mere rutinemæssigt systematisk.

Kapitel 4

Kinematisk Moderat Ulineær Teori for Plane, Retliniede Bjælker

4.1 Indledning

Det er ikke altid tilladeligt at antage, at flytningerne er infinitesimale. Man kan let overbevise sig om rigtigheden af dette ved at tage en plexiglaslineal og stille den på højkant og presse nedad med den ene hånd, som vist på Fig. 4-1.1. Når trykket bliver tilstrækkelig stort, bøjer linealen ud til den ene side og er derfor holdt op med at opføre sig som en stang i overensstemmelse med afsnit 1.2. Pludselig ligner den mere en bjælke, men den måde, den bøjer ud på, kan ikke beskrives ved teorien fra afsnit 1.3. I dette tilfælde har linealen oplevet et *Søjlesvigt*,

Ikke altid
tilladeligt at
antage
infinitesimal
teori

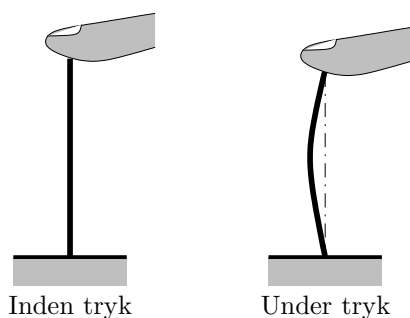


Fig. 4-1.1: Buling af lineal.

som netop er et ulineært bjælkefænomen. Vi behøver altså en “bedre” bjælket teori end den, vi hidtil har opstillet og benyttet. Det er netop sådanne teorier, vi vil

beskæftige os med i dette kapitel. Men, først skal vi overveje, hvor stor grad af ulinearitet, vi vil forlange, at vor nye teori kan omfatte. Hvis vi ville forlange, at vor teori skulle kunne beskrive opførslen af spiralfjederen i et armbåndsurs, måtte vi kræve, at teorien kunne omfatte vilkårligt store rotationer og krumningstøjninger, men faktisk ikke særligt store aksialtøjninger. Eftersom vi i det følgende vil begrænse os til bygningskonstruktioner, vil vi kunne nøjes med en teori, der er gyldig for meget mindre rotationer, typisk mindre end $5^\circ \approx 0.1 \text{ rad.}$, og små krumningstøjninger, idet hverken beton-, træ- eller stålbjælker i brugstilstand krummer ret meget. Med hensyn til aksialtøjningerne vil vi forudsætte, at de er små, idet vi af ret indlysende årsager ikke vil forlange, at teorien skal kunne beskrive elastikopførsel af en bjælke. Med de nævnte begrænsninger falder teorien inden for kategorien *Kinematisk Moderat*.

Lad det med det samme være sagt, at der er flere måder at opstille en sådan teori på. Vi vil her vælge en, der afviger fra den, vi oprindeligt benyttede til at udlede den infinitesimale (kinematisk lineære) teori i afsnit 1.3, eftersom det er mere tilfredsstillende at gøre som her, se (Byskov 2002a) og (Byskov 2002b), idet den forudsætter et *virtuelt arbejdes princip* gældende, se også kapitel 2.

Især tidligere tog man udgangspunkt i ligevægtsligningerne, hvilket i dette tilfælde indebærer forskellige problemer, såvel af teoretisk som pædagogisk karakter, hvorfor den nutildags er opgivet.

Da vi ønsker at benytte *de virtuelle flytningers princip* som et udgangspunkt, er vi nødt til at have en flytnings-tøjningsrelation, dvs. en tøjningsdefinition, som er “passende ulineær.” Hvad der menes med dette, fremgår af afsnit 4.2.

4.2 Aksialtøjningsmål for Kinematisk Moderat Ulineær Bjælke

Moderat
ulineært aksial-
tøjningsmål

Det ser ud til, at den lineære bjælketeori ikke kan beskrive søjleinstabilitet. Vi skal se, at vi mangler et “bedre” aksialtøjningsmål end hidtil, nemlig et, der tager hensyn til den kinematiske ulinearitet, medens det lineære krumningstøjningsmål vil vise sig at være tilstrækkelig godt til så at sige alle formål inden for bygningsstatikken. Med henblik på opstilling af det ulineære — faktisk moderat ulineære — tøjningsmål har vi brug for Fig. 4-2.2.

Et aksialtøjningsmål har som opgave at udtrykke, hvor meget bjælkens systemlinje er blevet længere — regnet med fortegn. Derfor vil vi finde forskellen mellem det udeformerede bjælkeelement ds^0 og det deformerede ds . Ved anvendelse af *Pythagoras’* sætning kan vi finde:

$$ds^2 = (dx + du)^2 + dw^2 \quad (4.1)$$

dvs.

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx + du)^2 + dw^2} = dx \sqrt{1 + 2u' + (u')^2 + (w')^2} \\ &\approx dx \left(1 + u' + \frac{1}{2}(u')^2 + \frac{1}{2}(w')^2\right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

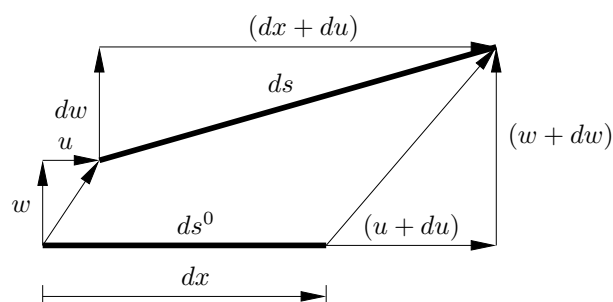


Fig. 4-2.2: Bjælkeelement i udeformeret og deformeret tilstand. Flytningerne er stærkt overdrevne.

Lad os nu definere aksialtøjningen ε som den relative længdeændring og benytte det netop fundne udtryk for ds :

$$\varepsilon = \frac{ds - ds^0}{ds^0} \approx u' + \frac{1}{2}(u')^2 + \frac{1}{2}(w')^2 \quad (4.3)$$

Idet vi ikke ønsker at kunne beskrive “elastikopførsel” af bjælken, kan vi forudsætte:

$$\frac{1}{2}(u')^2 \ll u' \quad (4.4)$$

hvorfor vi med udgangspunkt i (4.3) vil definere aksialtøjningsmålet ved:

$$\varepsilon \equiv u' + \frac{1}{2}(w')^2 \quad (4.5)$$

Det herved definerede tøjningsmål hører til den klasse af teorier, som man kalder *kinematisk moderat ulineære*, eftersom de er udledt under forudsætning af, at flytninger og flytningsafledede nok er endelige, men ikke vilkårligt store.

4.3 Variationer — Virtuelle Flytninger og Tøjninger

I kapitel 2 har vi så at sige ad bagdøren indført virtuelle størrelser, såsom δw og $\delta \kappa$, idet vi ved de virtuelle flytningers princip begyndte med ligevægtsligningerne og multiplicerede den ene med feltet $\delta \alpha$, hvorefter vi foretog forskellige matematiske manipulationer for til sidst at kunne tolke $\delta \alpha$ som variationen δw af tværflytningen w og $\delta \alpha''$ som variationen $\delta \kappa$ af krumningstøjningen κ . Helt så nemt går det ikke, når vi ønsker at tage hensyn til den kinematiske ulinearitet. Her skal vi indføre begrebet *variationer*, der er meget nøje knyttet til *virtuelle størrelser*, som vi skal se i det følgende.

Lad os betragte en tilstand for en bjælke, hvor den har fået udbøjningen w

Virtuel
~ Variation

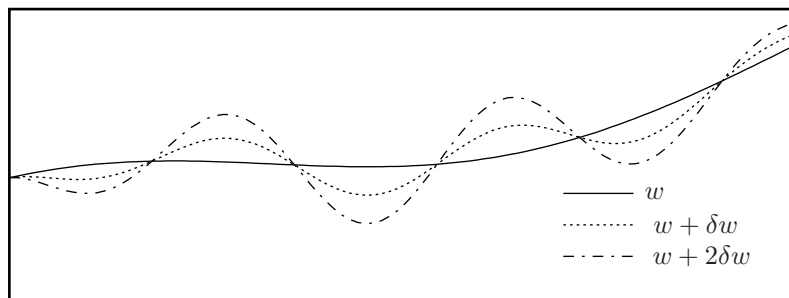


Fig. 4-3.3: Funktion w og to variationer δw og $2\delta w$.

som vist på Fig. 4-3.3. Vi forstyrrer nu denne tilstand med en *variation* $(\delta w, \delta u)$,¹ som er *virtuel* og derfor *ikke* er udtryk for en fysisk ændring af bjælkens deformation. De fysiske bjælketøjninger er:

$$\begin{aligned}\varepsilon(u, w) &= u' + \frac{1}{2}(w')^2 \\ \kappa(w) &= w''\end{aligned}\tag{4.6}$$

medens de, inklusive virtuelle led, bliver:

$$\begin{aligned}\varepsilon(u + \delta u, w + \delta w) &= (u + \delta u)' + \frac{1}{2}((w + \delta w)')^2 \\ \kappa(w + \delta w) &= (w + \delta w)''\end{aligned}\tag{4.7}$$

eller

$$\begin{aligned}\varepsilon(u + \delta u, w + \delta w) &= u' + \delta u' + \frac{1}{2}(w')^2 + 2w'\delta w' + \frac{1}{2}(\delta w')^2 \\ \kappa(w + \delta w) &= w'' + \delta w''\end{aligned}\tag{4.8}$$

hvor vi kan samle leddene i (4.8) efter graden af variation samt indføre (4.6) og få:

$$\begin{aligned}\varepsilon(u + \delta u, w + \delta w) &= \varepsilon(u, w) + (\delta u' + 2w'\delta w') + \frac{1}{2}(\delta w')^2 \\ \kappa(w + \delta w) &= \kappa(w) + \delta w''\end{aligned}\tag{4.9}$$

Rent formelt kan vi altid skrive:

$$\begin{aligned}\varepsilon(u + \delta u, w + \delta w) &= \varepsilon(u, w) + \delta\varepsilon + \delta^2\varepsilon \\ \kappa(w + \delta w) &= \kappa(w) + \delta\kappa + \delta^2\kappa\end{aligned}\tag{4.10}$$

¹Af flere grunde indfører man ofte variationerne som $(\epsilon\delta w, \epsilon\delta u)$, herunder for at kunne skelne mellem variationens *form* $(\delta w, \delta u)$ og dens *amplitude* ϵ , se for eksempel (Byskov 2002a) og (Byskov 2002b). I nærværende sammenhæng har jeg ikke valgt denne fremgangsmåde, idet jeg har skønnet, at dens fordele ikke ville kunne opveje den let øgede kompleksitet.

hvor eksponenten 2 angiver, at leddet er af anden grad i variationerne. Accepterer vi denne skrivemåde, kan vi ved sammenligning mellem (4.9) og (4.10) konkludere, at tøjningsvariationerne er:²

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon &= \delta u' + 2w'\delta w' \\ \delta\kappa &= \delta w''\end{aligned}\tag{4.11}$$

Det er andet led på højresiden af (4.11a), der — populært sagt — får søjlen til at bryde sammen.

Ud over (4.11) vil vi også få brug for et udtryk for variationen af rotationen. Da der her er tale om en Bernoulli-Euler teori, er rotationen ω givet ved:

$$\omega(u, w) = w'\tag{4.12}$$

hvorfor vi for dens variation finder:

$$\delta\omega = \delta w'\tag{4.13}$$

helt i analogi med (4.11b).

4.4 De Virtuelle Flytningers Princip for Kinetisk Moderat Ulineær Bjælke

Som nævnt i afsnit 4.1, vil vi her benytte de *Virtuelle Flytningers Princip* som et udgangspunkt for de videre udledninger, herunder ligevægtsligningerne. Først skal vi dog have defineret de belastninger, vi ønsker at tage hensyn til, se Fig. 4-4.4. For god ordens skyld nævnes, at vi vil forudsætte, at alle belastninger beholder deres størrelse og retning uafhængigt af flytningerne.

Virtuelle flytningers princip \Rightarrow Ligevægtsligninger

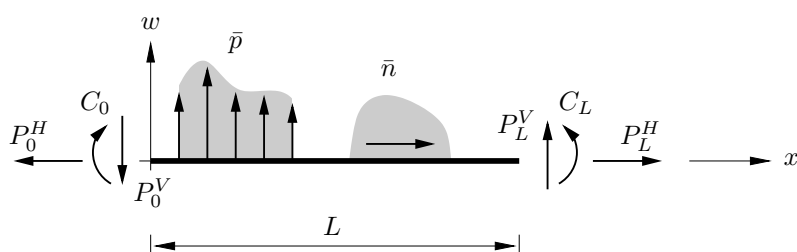


Fig. 4-4.4: Belastninger på bjælke.

Vi vil forlange de virtuelle flytningers princip gældende på samme form som

²Dette falder i øvrigt også godt i tråd med, at vi vil forudsætte, at variationerne er infinitesimale, hvorved deres kvadrat forsvinder sammenlignet med dem selv.

i afsnit 2.2:

$$\begin{aligned} & \int_0^L N \delta \varepsilon dx + \int_0^L M \delta \kappa dx \\ = & [P^H \delta u]_0^L + [P^V \delta w]_0^L + [C \delta w']_0^L + \int_0^L (\bar{n} \delta u + \bar{p} \delta w) dx \end{aligned} \quad (4.14)$$

hvor de tre første led efter lighedstegnet angiver de mulige randledd. Med variationerne af flytnings-tøjningsrelationerne (4.11) indført, findes:

$$\begin{aligned} & \int_0^L N(\delta u' + w' \delta w') dx + \int_0^L M \delta w'' dx \\ = & [P^H \delta u]_0^L + [P^V \delta w]_0^L + [C \delta w']_0^L + \int_0^L (\bar{n} \delta u + \bar{p} \delta w) dx \end{aligned} \quad (4.15)$$

For at få opstillet ligevægtsligningerne ud fra (4.15) skal δu og δw indgå uden differentiation i de led, der indeholder integraler.³ Ved benyttelse af delvis integration findes:

$$\begin{aligned} & [N \delta u]_0^L - \int_0^L N' \delta u dx + [(N w') \delta w]_0^L - \int_0^L (N w')' \delta w dx \\ & + [M \delta w']_0^L - [M' \delta w]_0^L + \int_0^L M'' \delta w dx \\ = & [P^H \delta u]_0^L + [P^V \delta w]_0^L + [C \delta w']_0^L + \int_0^L (\bar{n} \delta u + \bar{p} \delta w) dx \end{aligned} \quad (4.16)$$

Efter omordning af leddene kan vi finde:

$$\begin{aligned} & [N \delta u]_0^L - [(M' - (N w')) \delta w]_0^L + [M \delta w']_0^L \\ & - \int_0^L N' \delta u dx + \int_0^L (M'' - (N w')') \delta w dx \\ = & [P^H \delta u]_0^L + [P^V \delta w]_0^L + [C \delta w']_0^L + \int_0^L (\bar{n} \delta u + \bar{p} \delta w) dx \end{aligned} \quad (4.17)$$

Statistiske
ligninger

Ved benyttelse af “nulreglen” på leddene hver for sig, finder vi følgende sta-

³Det er i og for sig ret indlysende — i hvert tilfælde når man har været øvelsen igennem nogle gange — at man skal skifte differentiationerne i modsat retning af det, der skete i afsnit 2.2.2.

tiske ligninger:

$$\begin{aligned}
 \text{Feltligninger:} \quad & N' + \bar{n} = 0 \\
 & M'' - (Nw')' - \bar{p} = 0 \\
 \text{Mulige randbetingelser:} \quad & [N]_0^L = [P^H]_0^L \\
 & [(M' - (Nw'))]_0^L = -[P^V]_0^L \\
 & [M]_0^L = [C]_0^L
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Disse udtryk minder en del om (1.8) og (1.28), men, som det ses, er der naturligvis visse forskelle, eftersom vi nu arbejder med en ulineær teori, hvor vi tidligere havde begrænset os til lineære teorier. Vi vil dog formentlig antage, at N er en eller anden form for normalkraft, og at M kan tolkes som et snitmoment.

Af betingelserne i (4.18) er det vel kun den anden feltligning og det andet sæt af randbetingelser, der umiddelbart ser usædvanlige ud, når man sammenligner med (1.8) og (1.28). Før vi kan tolke N og M som snitkræfter, må vi imidlertid betragte alle betingelserne i (4.18) under ét, idet alle udtryk er nøje knyttet sammen. For at lette tolkningerne indfører vi *hjelpestørrelsen* V ved:

$$\text{Hjelpestørrelse: } V \equiv -M' + (Nw') \tag{4.19}$$

Det er ikke tilfældigt, at vi har noteret hjelpestørrelsen ved V , idet vi nok vil formode, at den enten er forskydningskraften eller i det mindste er tæt knyttet til den. Ved indførelse af (4.19) i (4.18) kan vi finde:

$$\begin{aligned}
 \text{Feltligninger:} \quad & N' + \bar{n} = 0 \\
 & V' + \bar{p} = 0 \\
 & V = -M' + (Nw') \\
 \text{Mulige randbetingelser:} \quad & [N]_0^L = [P^H]_0^L \\
 & [V]_0^L = [P^V]_0^L \\
 & [M]_0^L = [C]_0^L
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Vi kan nu se identiteten mellem (4.20b) og (1.23) og ligheden mellem (4.20c) og (1.26).

I afsnit 4.5 vil vi se på, hvorledes N , V og M kan tolkes som snitkræfter.

4.5 Ligevægtsligninger for Kinematisk Moderat Ulineær Bjælke

I denne sammenhæng bliver vi nødt til at opstille ligevægtsligningerne i den deformerede tilstand, hvorfor vi først er nødt til at betragte kinematikken for et deformeret bjælkeelement, se Fig. 4-5.5.

$V \equiv -M' + Nw'$
er en
hjelpestørrelse

Statiske
ligninger

Ligevægt i
deformet
tilstand

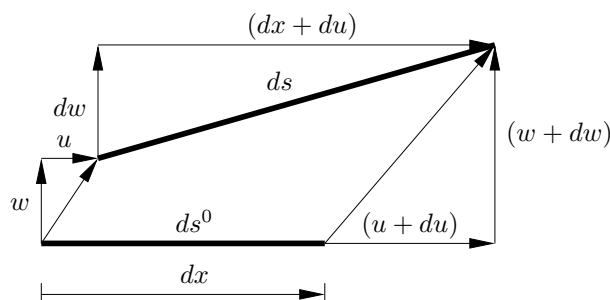


Fig. 4-5.5: Bjælkeelement i udeformeret og deformeret tilstand. Flytningerne er stærkt overdrevne.

Som nævnt indledningsvis i afsnit 4.4, vil kun betragte belastninger $\bar{n}(x)$ og $\bar{p}(x)$, hvis størrelse og retning er uafhængige af flytningerne, dvs. *konserverative* i meget streng forstand. Med hensyn til snitkræfterne (N, V, M) vil det vise sig,

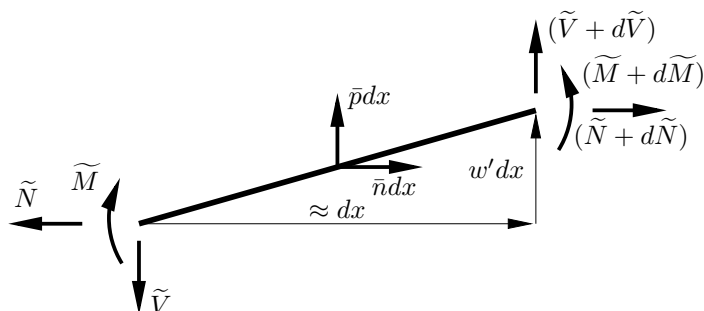


Fig. 4-5.6: Bjælkeelement i udeformeret og deformeret tilstand. Flytningerne er stærkt overdrevne.

at de to første skal defineres som dem, der ikke ændrer retning ved deformation, hvilket falder godt i tråd med belastningsretningerne, men som nok strider mod ens forventning, idet normalkraften N vel normalt opfattes som den komponent, der følger tangenten til bjælkens systemlinje, medens forskydningskraften V er den komponent, der står vinkelret på bjælkens systemlinje. Det vil derfor være berettiget at kalde de herved definerede snitkræfter N og V for pseudosnitkræfter i lighed med de fra kontinuummeknikken kendte *Piola-Kirchhoff Spændinger*, se (Byskov 2002a), som betegnes pseudospændinger, idet de ikke kan opfattes som kraft pr. øjeblikkelig arealenhed. Inden vi kan begynde opstillingen af ligevægtsligningerne, skal vi konstatere, at den vandrette projektion af det deformerede bjælkeelement er $\approx dx$, hvilket imidlertid ikke betyder, at aksialtøjningen ε og hældningen w' er nul. Blot fordi $dx \approx ds \cos(w') = (1 + \varepsilon) ds^0 \cos(w')$, kan man ikke deraf slutte, at $\varepsilon = 0$ og $w' = 0$. Sagt med andre ord: Hvis $a = 1.000000$ og $b = 1.000005$, kan vi ofte med god tilnærmelse postulere, at $a \approx b$, medens vi —

i hvert tilfælde ikke altid — heraf kan slutte, at $a - b \approx 0$.

De på Fig. 4-5.6 viste snitkræfter er forsynet med *tilder* for at forhindre forveksling med dem, der i afsnit 4.4 defineredes ved de virtuelle flytningers princip. Ved betragtning af Fig. 4-5.6 kan de to projektligninger relativt let opstilles:

$$\begin{aligned} \text{Vandret ligevægt: } & -\tilde{N} + \bar{n}dx + (\tilde{N} + d\tilde{N}) = 0 \\ \text{Lodret ligevægt: } & -\tilde{V} + \bar{p}dx + (\tilde{V} + d\tilde{V}) = 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

dvs.

$$\begin{aligned} \text{Vandret ligevægt: } & \tilde{N}' + \bar{n} = 0 \\ \text{Lodret ligevægt: } & \tilde{V}' + \bar{p} = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Momentligevægten kræver en smule omhu. Vi vil tage moment om højre ende og regne det positivt mod uret:

$$\begin{aligned} \text{Momentligevægt: } & -\tilde{M} - \tilde{N}(w'dx) + \tilde{V}dx \\ & + (\bar{n}dx) \left(\frac{1}{2}(w'dx) \right) \\ & - (\bar{p}dx) \left(\frac{1}{2}dx \right) + (\tilde{M} + d\tilde{M}) = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

hvoraf findes:

$$\text{Momentligevægt: } \tilde{M}' - \tilde{N}w' + \tilde{V} + \frac{1}{2}\bar{n}w'dx - \frac{1}{2}\bar{p}dx = 0 \quad (4.24)$$

Som man ser, optræder der i to af leddene, nemlig dem, der indeholder \bar{n} og \bar{p} , faktoren dx , hvorved disse led er infinitesimale, medens de øvrige er endelige. Altså fås:

$$\text{Momentligevægt: } \tilde{M}' - \tilde{N}w' + \tilde{V} = 0 \quad (4.25)$$

I nærværende sammenhæng vil vi alene beskæftige os med *Bernoulli-Euler Bjælker*, som blandt andet er karakteriseret ved, at forskydningskraften ikke er en *generaliseret spænding*, idet forskydningsstøjningen er nul for disse bjælker. Vi vil derfor eliminere \tilde{V} af de fundne udtryk. Ved differentiation af (4.25) findes:

$$\tilde{M}'' - (\tilde{N}w')' + \tilde{V}' = 0 \quad (4.26)$$

hvor i indsættes (4.22) med resultatet:

$$\tilde{M}'' - (\tilde{N}w')' - \bar{p} = 0 \quad (4.27)$$

Fra dette punkt vil vi alene opfatte (4.22a) og (4.27) som de egentlige ligevægtsligninger, medens (4.25) alene benyttes som definitions-ligning for *hjælpestørrelsen* \tilde{V} , hvorfor denne omskrives:

$$\tilde{V} \equiv -\tilde{M}' + (\tilde{N}w') \quad (4.28)$$

Tolkning af \tilde{N} ,
 \tilde{V} og \tilde{M}

Ved sammenligning mellem de her fundne feltligninger og dem, der udledes ud fra de virtuelle flytningers princip, kan vi føle os berettiget til at tolke \tilde{N} som N , \tilde{V} som V og \tilde{M} som M , idet vi nok uden videre kan overbevise os selv om, at de statiske randbetingelser også er helt analoge.

4.6 Flytningsdifferentialligninger

Flytningsdifferentialligning

I modsætning til, hvad der var tilfældet i afsnit 1.3.6, vil vi normalt ikke forsøge at opstille flytningsdifferentialligningerne for det kinematisk moderat ulineære tilfælde. Dette skyldes det ulineære led $-(Nw')'$, se for eksempel (4.18b), som ville komme til at indeholde led af typerne $u'w'$ og $(w')^3$, hvilket ville indebære en større og mere ugenomsigtig ulinearitet end den, der fremgår af (4.18b). Når man beholder (4.18b), skyldes det ikke kun denne omstændighed, men også at aksialkraften N ofte enten er kendt eksakt eller med nogenlunde god tilnærmelse. Det første vil som oftest gælde for søjler, se afsnit Ex 4-1. I det andet tilfælde vil man normalt alligevel være nødt til at iterere i de styrende ligninger, og i så fald vil det være relativt robust at operere med w og N som ubekendte i stedet for w og u .

Vi vil altså for lineærelastiske søjler for det meste kun behøve den fysiske betingelse for momentet, se (1.29):

$$M(x) = EI(x)\kappa(x) \quad (4.29)$$

medens den tilsvarende betingelse (1.9) for aksialkraften kun undtagelsesvist benyttes. Derfor indfører vi flytnings-tøjningsrelationen (1.20):

$$\kappa(x) = w''(x) \quad (4.30)$$

hvorved vi finder:

$$(EIw'')'' - (Nw')' - \bar{p} = 0 \quad (4.31)$$

der er en lineær differentialligning i w . Er N således kendt, kan vi, især hvis $EI = \text{const.}$ og $N = \text{const.}$, finde den eksakte løsning. I dette tilfælde kan vi omskrive (4.31):

$$w^{iv} - \frac{N}{EI}w'' = \frac{\bar{p}}{EI} \quad (4.32)$$

eller:

$$w^{iv} + k^2w'' = \frac{\bar{p}}{EI} \quad (4.33)$$

Definition af k^2

hvor definitionen af k^2 nok ikke er umiddelbart indlysende:

$$k^2 \equiv -\frac{N}{EI} \quad (4.34)$$

Når man definerer k^2 som $-N/(EI)$ i stedet for $+N/(EI)$, skyldes det, at man traditionelt har været mere interesseret i søjleproblemer, hvor normalkraften N er negativ, end i problemer med bjælker med trækkræfter. Det vil i øvrigt også ret let kunne vises, at den “afstivende” virkning, som ydes af en trækraft, er meget mindre betydningsfuld end den “blødgørende” virkning, der forårsages af en trykkraft.

4.7 Resumé

I dette afsnit resumeres de vigtigste formler vedrørende den kinematisk moderat ulineære teori for plane, retliniede bjælker.

4.7.1 Kinematik

Tøjninger:

$$\begin{aligned}\varepsilon(u, w) &= u' + \frac{1}{2}(w')^2 \\ \kappa(w) &= w''\end{aligned}\tag{4.35}$$

Tøjninger

Tøjningsvariationer:

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon &= \delta u' + 2w'\delta w' \\ \delta\kappa &= \delta w''\end{aligned}\tag{4.36}$$

Tøjningsvariation

4.7.2 Virtuelle Flytningers Princip

$$\begin{aligned}&\int_0^L N\delta\varepsilon dx + \int_0^L M\delta\kappa dx \\ &= [N\delta u]_0^L + [V\delta w]_0^L + [M\delta\omega]_0^L + \int_0^L (\bar{n}\delta u + \bar{p}\delta w) dx\end{aligned}\tag{4.37}$$

Virtuelle flytningers princip

4.7.3 Ligevægtsligninger

$$\begin{aligned}\text{Vandret ligevægt:} & N' + \bar{n} = 0 \\ \text{Lodret ligevægt og momentligevægt:} & M'' - (Nw')' - \bar{p} = 0 \\ \text{Hjælpestørrelse, forskydningskraft:} & V \equiv -M' + Nw'\end{aligned}\tag{4.38}$$

Ligevægtsligninger

4.7.4 Styrende Ligninger for Lineærelastiske Søjler

De styrende differentiaalligninger, vi vil benytte os af i tilfældet med lineærelastiske søjler, er:

$$\begin{aligned}N' + \bar{n} &= 0 \\ (EIw'')'' - (Nw')' - \bar{p} &= 0\end{aligned}\tag{4.39}$$

Styrende ligninger

eller, for konstant EI og konstant N :

$$\begin{aligned}N' &= 0 \\ w^{iv} - \frac{N}{EI}w'' &= \frac{\bar{p}}{EI}\end{aligned}\tag{4.40}$$

 $EI = \text{const.}$
 $N = \text{const.}$

som kan omskrives til:

$$\begin{array}{l} EI = \text{const.} \\ N = \text{const.} \end{array} \quad \begin{array}{l} N' = 0 \\ w^{iv} + k^2 w'' = \frac{\bar{P}}{EI} \end{array} \quad (4.41)$$

hvor

$$k^2 \equiv -\frac{N}{EI} \quad (4.42)$$

4.8 Eksempler på Søjlebuling

Fire simple
søjleeksempler

Der findes fire simple eksempler på søjlebuling eller søjleknækning,⁴ som gennemgås nedenfor.

I alle eksempler vil vi definere *lastenheden* \bar{P} ved:

$$\begin{array}{l} \text{Lastenhed } \bar{P} \end{array} \quad \bar{P} = \pi^2 \frac{EI}{L^2} \quad (4.43)$$

Lastparameter λ

og indføre en *lastparameter* λ , som beskriver intensiteten af belastningen. Herved vil vi finde normalkraften N :

$$N = -\lambda \bar{P} = -\lambda \pi^2 \frac{EI}{L^2} \quad (4.44)$$

Definitionen af \bar{P} , som ved første øjekast kan synes noget vilkårlig, vil vise sig at være ganske fornuftig.

For søjler er der ingen tværlast, men alene aksiallasten \bar{P} , hvorfor vi af (4.39b) får:

$$(EIw'')'' - (Nw')' = 0 \quad (4.45)$$

Dette er et *egenværdiproblem*, idet der ikke er noget drivende led i differentiaalligningen — den er *homogen*.⁵ Under forudsætning af at randbetingelserne for w og dens afledede også er homogene, dvs. at der ikke forekommer endelaste, endemomenter eller foreskrevne flytninger i form af foreskrevne værdier af w eller w' , kan vi indse en karakteristisk egenskab ved egenværdiproblemer, nemlig at løsningens form måske (faktisk er) given, medens dens amplitude er vilkårlig. Dette indses for eksempel ved at betragte (4.45). Er w_1 en løsning, er for eksempel aw , hvor a er en konstant, også en løsning, idet a simpelthen kan forkortes i (4.45).

Ex 4-1 Eulersøjlen

Den enkleste anvendelse af den kinematisk moderat ulineære bjælketeori består i at finde “knæklasten” for den søjle, der er kendt som *Eulersøjlen*, se Fig. Ex. 4-1.1. I overensstemmelse med den konvention, der er gældende

⁴Betegnelsen “søjleknækning” er faktisk misvisende for elastiske søjler, idet de netop ikke knækker, medmindre man har indført en brudgrænse for krumningstøjningen.

⁵I tilfælde af matrixegenværdiproblemer er det matrixligningen, der er homogen.

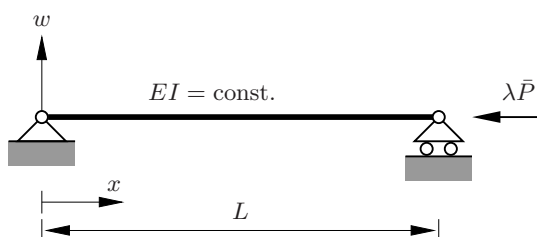


Fig. Ex. 4-1.1: Eulersøjlen.

internationalt, beskriver man belastningen ved en *lastenhed* \bar{P} og en *lastfaktor* λ , hvor λ har den samme opgave som lastfaktoren α har i forbindelse med de plastiske bjælker og rammer, se kapitel 3.

For nemheds skyld gentages (4.44) her:

$$N = -\lambda \bar{P} = -\lambda \pi^2 \frac{EI}{L^2} \quad (\text{Ex. 4-1.1})$$

Vi behøver randbetingelser på w , hvoraf to ikke er kinematiske, men statiske og givet ved M . De omskrives, som sædvanligt, til betingelser på w'' . De fire randbetingelser er da:

$$\begin{aligned} \text{Kinematisk: } w(0) &= 0 \\ \text{Statisk: } M(0) = 0 &\implies w''(0) = 0 \\ \text{Kinematisk: } w(L) &= 0 \\ \text{Statisk: } M(L) = 0 &\implies w''(L) = 0 \end{aligned} \quad (\text{Ex. 4-1.2})$$

Vi omskriver differentialligningen (4.40b), se afsnit 4.7, ved brug af (Ex. 4-1.1) og (4.43):

$$w^{iv} + \lambda \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 w'' = 0 \quad (\text{Ex. 4-1.3})$$

Umiddelbart kan vi konstatere, at alle funktioner $w_J(x)$ givet ved:

$$w_J(x) = \xi_J \sin(J\pi x/L) \quad (\text{Ex. 4-1.4})$$

hvor ξ_J er amplituder, som vil vise sig at være arbitrære, og J er positive heltal, idet alle randbetingelser (Ex. 4-1.2) ses at være opfyldt. Efter indsættelse af (Ex. 4-1.4) giver differentialligningen (Ex. 4-1.3):

$$\left(\xi_J J^4 \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 - \lambda \xi_J J^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^4\right) \sin(J\pi x/L) = 0 \quad (\text{Ex. 4-1.5})$$

Dette udtryk er tilfredsstillet for $J = 0$, for $Jx/L = \text{heltal}$, og for parentesens lig med nul. Den første mulighed er klart ikke interessant i denne forbindelse, eftersom den svarer til den retliniede tilstand, dvs. intet stabilitetssvigt, og den anden er heller ikke relevant, idet den kun udtaler sig om separate punkter på søjlen, hvilket efterlader den tredje mulighed som den relevante.

Vi kræver altså:

$$\xi_J J^4 \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 - \lambda \xi_J J^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 = 0 \quad (\text{Ex. 4-1.6})$$

som efter forkortelse giver de værdier λ_J af λ , for hvilke løsninger er mulige:

$$\lambda_J = J^2 \quad (\text{Ex. 4-1.7})$$

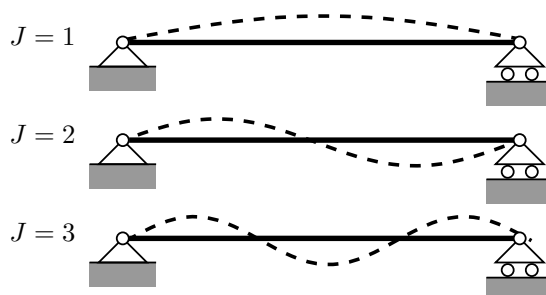


Fig. Ex. 4-1.2: Eulersøjle's tre første buleformer.

Det synes formentlig klart, at vi her kun er interesseret i den laveste værdi $\lambda_1 = 1$,⁶ idet vi næppe kan forvente, at en søjle kan bære mere end den mindste bulelast, som er:

$$\lambda_1 \bar{P} = \pi^2 \frac{EI}{L^2} \approx 9.870 \frac{EI}{L^2} \quad (\text{Ex. 4-1.8})$$

Berettigelsen af definitionen (4.43) af \bar{P} skulle være klar i lyset af det netop fundne resultat.

Blot ved at kigge på buleformerne for $J = 1, 2, 3$, se Fig. Ex. 4-1.2, vil de fleste nok rent intuitivt tro på, at buleformerne for $J > 1$ kræver for megen energi i forhold til den, der svarer til $J = 1$. For buling af plader skal man imidlertid passe meget på med at lade sin intuition diktere valget af den buleform, man vil undersøge, se for eksempel (Byskov 2002b).

I eksempel Ex 4-1 kunne vi nogenlunde med det samme gætte løsningerne til problemet, som vi kunne se, er et *egenværdiproblem*.

Af hensyn til de øvrige søjleeksempler skal vi studere differentialligningen (Ex. 4-1.3) lidt nøjere, og til dette formål gentages den her:

$$w^{iv} + \lambda \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 w'' = 0 \quad (4.46)$$

Den generelle løsning til denne ligning må være af formen:

$$w(x) = a_0 + a_1 x/L + a_2 \cos(m\pi x/L) + a_3 \sin(m\pi x/L) \quad (4.47)$$

hvor a_j og m er konstanter, der bestemmes ved randbetingelserne. Ved differentiation af (4.47) kan vi finde:

$$w''(x) = - \left(m \frac{\pi}{L} \right)^2 (a_2 \cos(m\pi x/L) + a_3 \sin(m\pi x/L)) \quad (4.48)$$

⁶Til andre formål, især *geometrisk imperfekte søjler*, dvs. søjler, der er forkrummede på en eller anden måde, får man brug for de højere bulelaste $\lambda_2, \lambda_3, \dots$. Dette emne vil ikke blive behandlet her, og læseren henvises til andre kilder, som for eksempel (Byskov 2002b).

og

$$w^{iv}(x) = \left(m \frac{\pi}{L}\right)^4 (a_2 \cos(m\pi x/L) + a_3 \sin(m\pi x/L)) \quad (4.49)$$

Indsættes w'' givet ved (4.48) og w^{iv} givet ved (4.49) i differentialligningen (4.46), kan vi finde:

$$(a_2 \cos(m\pi x/L) + a_3 \sin(m\pi x/L))(m^2 - \lambda) = 0 \quad (4.50)$$

som skal være tilfredsstillet for *alle* værdier af x , hvilket kun kan lade sig gøre, når:

$$\lambda = m^2 \quad (4.51)$$

Hvis vi havde fundet, at λ skulle være *negativ*, ville vi være kommet i en selvmodstridende situation, idet hvis $\lambda < 0$ (svarende til træk i stedet for tryk i konstruktionen), skifter differentialligningen (4.46) karakter, og løsningerne vil ikke indeholde trigonometriske, men hyperbolske funktioner. For negative værdier af λ har den homogene differentialligning ingen løsninger.

I eksempel Ex 4-1 kan vi umiddelbart se, at det lineære led $a_0 + a_1 x/L$ og cosinusleddet $a_2 \cos(m\pi x/L)$ må forsvinde på grund af randbetingelserne. I det tilfælde bliver (4.47) altså:

$$w(x) = a_3 \sin(m\pi x/L) \quad (4.52)$$

hvor randbetingelserne kræver:

$$m = J, \quad J = 1, 2, 3, \dots \quad (4.53)$$

hvorved vi har genfundet løsningen fra eksempel Ex 4-1.

Vi skal nu se på et andet eksempel, nemlig eksempel Ex 4-2.

Ex 4-2 Indspændt-Indspændt Søjle

For den dobbelt indspændte søjle, se Fig. Ex. 4-2.1, er alle randbetingelser *kinematiske*.

Randbetingelserne er:

$$\begin{aligned} \text{Kinematisk: } w(0) &= 0 \\ \text{Kinematisk: } w'(0) &= 0 \\ \text{Kinematisk: } w(L) &= 0 \\ \text{Kinematisk: } w'(L) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{Ex. 4-2.1})$$

I dette tilfælde vil vi opstille randbetingelserne i en matrixligning:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & m\pi/L \\ 1 & 1 & \cos(m\pi) & \sin(m\pi) \\ 0 & 1/L & -m\pi/L \sin(m\pi) & m\pi/L \cos(m\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Ex. 4-2.2})$$

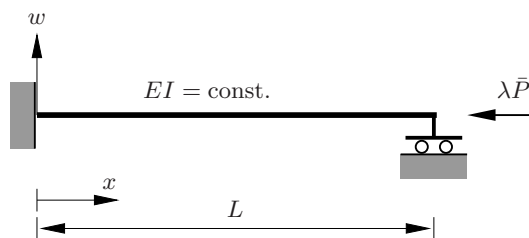


Fig. Ex. 4-2.1: Indspændt-indspændt søjle.

Dette matrixegenværdiproblem har kun løsninger, hvis koefficientmatrixens determinant $D^*(m)$ er lig med nul. Efter noget besvær kan man finde:

$$D^*(m) = \frac{m\pi(2 - m\pi \sin(m\pi) - 2 \cos(m\pi))}{L^2} \quad (\text{Ex. 4-2.3})$$

For at finde nulpunkterne for $D^*(m)$ plotter vi $D(m)$, hvor:

$$D(m) = 2 - m\pi \sin(m\pi) - 2 \cos(m\pi) \quad (\text{Ex. 4-2.4})$$

idet løsningen $m = 0$ ikke er fysisk rimelig i forbindelse med estimering af bulelasten, da den svarer til den retliniede, ikke udbøjede konfiguration.

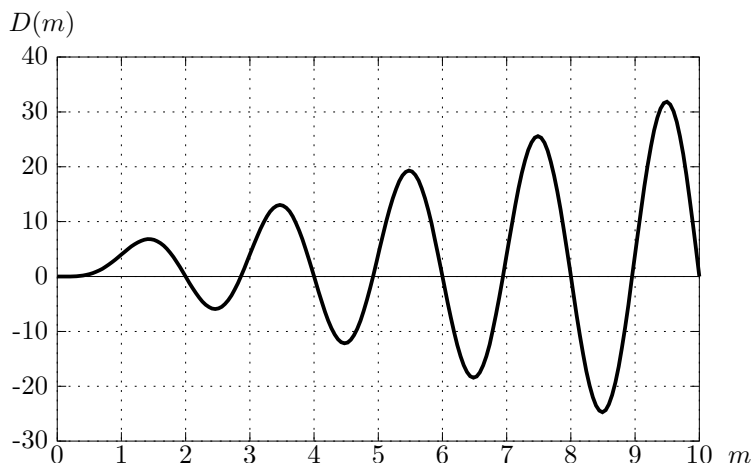


Fig. Ex. 4-2.2: Plot af $D(m)$ for indspændt-indspændt søjle.

Af (Ex. 4-2.4) ses, at $m = 2, 4, 6, \dots$ tilfredsstiller kravet $D(m) = 0$, hvilket også fremgår af Fig. Ex. 4-2.2. Af figuren ses, at der også eksisterer løsninger for værdier, der ligger ret tæt på $m = 3, 5, 7, \dots$, men som klart nok ikke er lig med de ulige heltal $3, 5, 7, \dots$. At disse værdier ikke medfører, at determinanten bliver nul, fremgår af (Ex. 4-2.4), idet $D(3) = D(5) = D(7) = \dots = 4$.

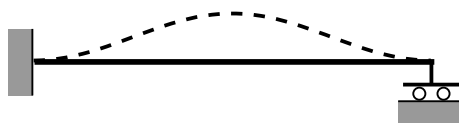


Fig. Ex. 4-2.3: Første buleform for den dobbelt indspændte søjle.

Også for denne søjle er det kun den laveste værdi $m = 2$, der har interesse af rent fysiske årsager. Den mindste værdi λ_1 af lastfaktoren λ bliver da, se (4.51):

$$\lambda_1 = 2^2 = 4 \quad (\text{Ex. 4-2.5})$$

hvorved selve bulelasten $\lambda_1 \bar{P}$ i dette tilfælde bliver:

$$\lambda_1 \bar{P} = 4\pi^2 \frac{EI}{L^2} \approx 39.478 \frac{EI}{L^2} \quad (\text{Ex. 4-2.6})$$

og altså præcis 4 gange så stor som for Eulersøjlen.

Hvis vi betragter Fig. Ex. 4-2.4, kan vi se, at det midterste stykke af søj-

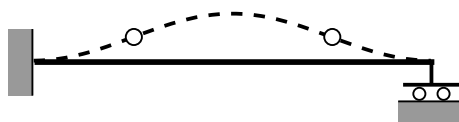


Fig. Ex. 4-2.4: Første buleform for den dobbelt indspændte søjle med positionen af vendetangenter angivet med cirkler.

len svarer til en Eulersøjle med den halve bjækelængde. Da bulelasten for Eulersøjlen skalerer omvendt med bjækelængden i anden potens, kan vi ud fra observationen af Fig. Ex. 4-2.4 slutte, at den dobbelt indspændte søjle netop har den firdobbelte bulelast af en Eulersøjle af den samme længde, hvilket da også stemmer med resultatet (Ex. 4-2.6).

De ikke-heltallige værdier af m skal vi diskutere senere under eksempel Ex 4-3.

I forbindelse med Fig. Ex. 4-2.4 erkendte vi, at bulelasten af den dobbelt indspændte søjle er lig med bulelasten af en Eulersøjle, der er halvt så lang, idet afstanden mellem vendetangenterne, som også er stedet, hvor bøjningsmomentet er nul, kan benyttes som det, der traditionelt kaldes den *frie søjlelængde*. Den frie søjlelængde gives ofte betegnelsen ℓ . I dette tilfælde var $\ell = L/2$.

Vender vi tilbage til Fig. Ex. 4-1.2, kan vi se, at for $J = 2$ må $\ell = L/2$ svarende til en bulelast på det firdobbelte af Eulersøjle's bæreevne. Tilsvarende er $\ell = L/3$ for $J = 3$, hvilket giver en bulelast på 9 gange Eulersøjle's. Ideen med hensyn til den frie søjlelængde fungerer altså fint i disse tilfælde.

Ex 4-3 Indspændt-Simpelt Understøttet Søjle

For den indspændt-simpelt understøttede søjle, se Fig. Ex. 4-3.1, har vi, som det var tilfældet med Eulersøjlen en blanding af *kinematiske* og *statiske* randbetingelser:

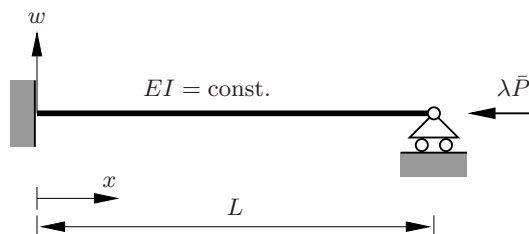


Fig. Ex. 4-3.1: Indspændt-simpelt understøttet søjle.

$$\begin{aligned}
 \text{Kinematisk: } w(0) &= 0 \\
 \text{Kinematisk: } w'(0) &= 0 \\
 \text{Kinematisk: } w(L) &= 0 \\
 \text{Statisk: } M(L) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{Ex. 4-3.1}$$

Også her vil vi opstille randbetingelserne i en matrixligning:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & m\pi/L \\ 1 & 1 & \cos(m\pi) & \sin(m\pi) \\ 0 & 0 & \cos(m\pi) & \sin(m\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \tag{Ex. 4-3.2}$$

hvor der i den sidste randbetingelse er forkortet med $-(m\pi/L)^2$, idet værdien $m = 0$ også her er uinteressant.

Koefficientmatricens determinant $D^*(m)$ er her:

$$D^*(m) = \frac{m\pi \cos(m\pi) - \sin(m\pi)}{L}
 \tag{Ex. 4-3.3}$$

For at finde nulpunkterne for $D^*(m)$ kan vi plotte $D(m)$, hvor:

$$D(m) = (m\pi) \cos(m\pi) - \sin(m\pi)
 \tag{Ex. 4-3.4}$$

idet løsningen $m = 0$ ikke er fysisk rimelig i forbindelse med estimering af bulelasten, da den svarer til den retliniede, ikke udbøjede konfiguration.

Ved at vælge $a_0 = 1$,⁷ kan vi af (Ex. 4-3.2) finde buleformen som:

$$w_1(x) = 1 - \frac{1}{\pi L}x - \cos(m\pi x/L) + \sin(m\pi x/L)/(m\pi)
 \tag{Ex. 4-3.5}$$

hvor værdierne af m bestemmes af betingelsen $D(m) = 0$.

⁷Husk at buleformens amplitude er ubestemt

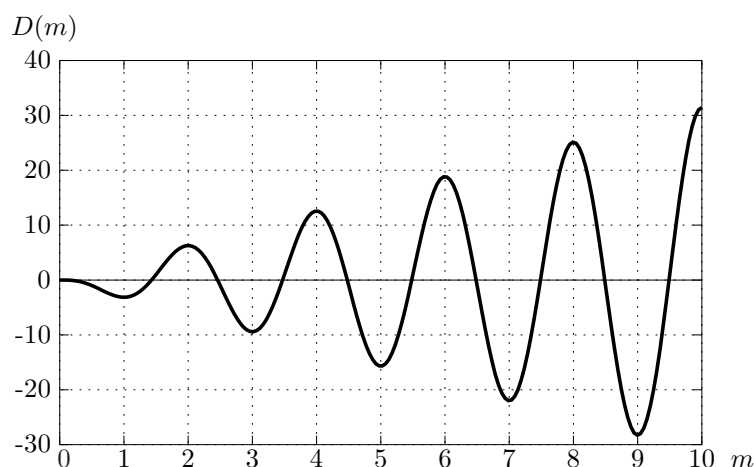


Fig. Ex. 4-3.2: Plot af $D(m)$ for indspændt-simpelt understøttet søjle.

Af (Ex. 4-3.4) ses, at ingen heltal tilfredsstiller kravet $D(m) = 0$, hvilket også kan ses af, at:

$$D(m) = 0 \implies m\pi = \tan(m\pi) \quad (\text{Ex. 4-3.6})$$

som vides ikke at have simple løsninger. De tre første løsninger er:

$$m = 1.430296653, 2.459024033, 3.470889724 \quad (\text{Ex. 4-3.7})$$

Af Fig. Ex. 4-3.2 ses også, at der ikke eksisterer løsninger for heltallige værdier af m . Fig. Ex. 4-3.3 viser buleformerne svarende til de tre laveste bulelaste. Den fysisk set interessante buleform er den, som svarer til $m =$

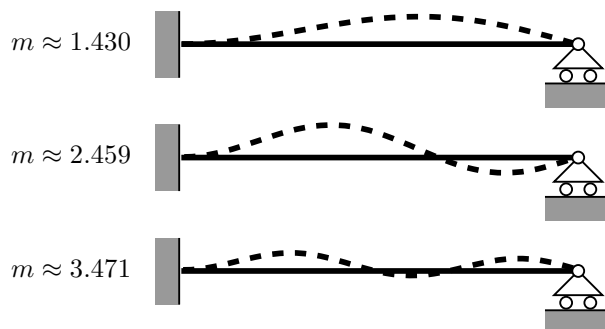


Fig. Ex. 4-3.3: Den indspændt-simpelt understøttede søjles tre første buleformer.

1.430296653, og som ved (4.51) giver værdien:

$$\lambda_1 = m^2 = 1.430296653^2 \approx 2.046 \quad (\text{Ex. 4-3.8})$$

og derfor bulelasten:

$$\lambda_1 \bar{P} = (1.430296653\pi)^2 \frac{EI}{L^2} \approx 20.19 \frac{EI}{L^2} \quad (\text{Ex. 4-3.9})$$

Den indspændt-simpelt understøttede søjle har altså en bæreevne, der er cirka den dobbelte af Eulersøjles. Den tidligere indførte *frie søjlelængde* ℓ kan opfattes som længden af den Eulersøjle, der giver den samme bulelast som den rigtige søjle. Altså:

$$\lambda_1 \bar{P} \approx (1.430296653\pi)^2 \frac{EI}{L^2} = \pi^2 \frac{EI}{\ell^2} \quad (\text{Ex. 4-3.10})$$

hvoraf findes:

$$\ell \approx 1.430296653^{-1} L \approx 0.699L \quad (\text{Ex. 4-3.11})$$

På Fig. Ex. 4-3.4 er den fri søjlelængde ℓ angivet.

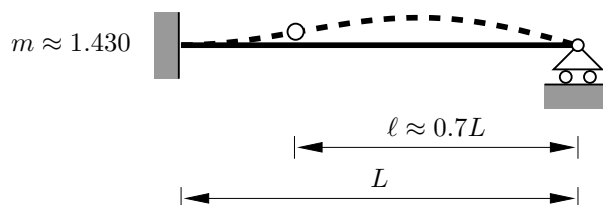


Fig. Ex. 4-3.4: Den indspændt-simpelt understøttede søjles første buleform med angivelse af fri søjlelængde ℓ .

Som omtalt i eksempel Ex 4-2 skal vi vende tilbage til de ikke-heltallige værdier af m . Betragter vi Fig. Ex. 4-3.3 og forestiller os, at vi spejler figurerne om den højre understøtning, vil vi kunne se, at disse konfigurationer alle er løsninger til buleproblemet for den dobbelt indspændte søjle, idet alle randbetingelser samt differentialligningen er tilfredsstillet. Vi skal dog ikke dyrke dette emne yderligere, men blot påpege, at det er disse former, der svarer til de ikke-heltallige værdier af m .

De tre ovenstående eksempler var karakteriseret ved, at randbetingelserne omfattede værdien af udbøjningen og dennes anden afledede via bøjningsmomentet. Det sidste eksempel er af en lidt anden karakter, idet den ene randbetingelse involverer forskydningskraften og derved den første og tredje afledede af udbøjningen.

Ex 4-4 Indspændt-Fri Søjle

Det sidste af de klassiske søjleeksempler fremgår af Fig. Ex. 4-4.1, som viser en indspændt-fri søjle. I dette tilfælde er begge randbetingelser i venstre ende *kinematiske*, medens begge betingelser i højre ende er *statiske*:

$$\begin{aligned} \text{Kinematisk: } w(0) &= 0 \\ \text{Kinematisk: } w'(0) &= 0 \\ \text{Statisk: } V(L) &= 0 \\ \text{Statisk:: } M(L) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{Ex. 4-4.1})$$

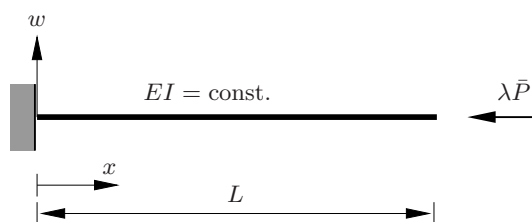


Fig. Ex. 4-4.1: Indspændt-fri søjle.

Den tredje af disse randbetingelse er noget mere kompliceret end de øvrige, idet den involverer forskydningskraften V , som defineredes i (4.19), som gentages her:

$$\text{Hjælpestørrelse: } V \equiv -M' + (Nw') \quad (\text{Ex. 4-4.2})$$

Når vi indfører N som givet ved (4.44) og som sædvanligt omskriver M ved den kinematiske og den fysiske betingelse, kan vi få:

$$V = -EIw''' - \lambda\bar{P}w' = -EIw''' - \lambda\pi^2 \frac{EI}{L^2} w' \quad (\text{Ex. 4-4.3})$$

hvorfor vi efter mindre omskrivninger, der primært indbefatter forkortelser, blandt andet af m^2 , kan finde den tredje randbetingelse:

$$0 = a_1 \quad (\text{Ex. 4-4.4})$$

så randbetingelserne på matrixform bliver:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & m\pi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(m\pi) & \sin(m\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Ex. 4-4.5})$$

hvor der, som i tidligere eksempler, i den sidste randbetingelse er forkortet med $-(m\pi/L)^2$, idet værdien $m = 0$ også her er uinteressant.

Koefficientmatricens determinant $D^*(m)$ er her:

$$D^*(m) = m\pi \cos(m\pi) \quad (\text{Ex. 4-4.6})$$

For at finde nulpunkterne for $D^*(m)$ behøver vi ikke at plotte, idet vi ved, at følgende værdier af m medfører, at $D^*(m) = 0$: hvor:

$$m = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots \quad (\text{Ex. 4-4.7})$$

Hertil svarer følgende værdier af lastparameteren:

$$\lambda = m^2 = \frac{1}{4}, \frac{9}{4}, \frac{25}{4}, \dots \quad (\text{Ex. 4-4.8})$$

og derfor bulelasten:

$$\lambda_1 \bar{P} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{EI}{L^2} \approx 2.47 \frac{EI}{L^2} \quad (\text{Ex. 4-4.9})$$

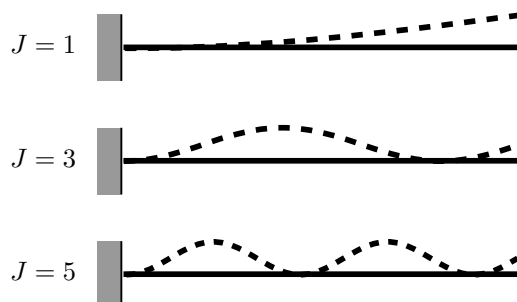


Fig. Ex. 4-4.2: De tre første buleformer for den indspændt-frie søjle.

som præcis er en fjerdedel af bulelasten for Eulersøjlen.

For at finde buleformerne i dette tilfælde gentages (Ex. 4-4.5) med (Ex. 4-4.7) indsat:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & m\pi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(m\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Ex. 4-4.10})$$

hvoraf ses, at buleformerne for $a_0 = 1$ bliver:

$$w_J = 1 - \cos\left(\frac{1}{2}(2J-1)\pi x/L\right) \quad (\text{Ex. 4-4.11})$$

Af de tre første buleformer, se Fig. Ex. 4-4.2 vil selv det utrænede øje nok vælge den første som den farligste, idet de to næste lader til at kræve mere bøjningsenergi.

Traditionelt har man ofte udnyttet den statiske bestemtighed for Eulersøjlen og den indspændt-frie søjle, og på den måde har man kunnet arbejde med en andenordens i stedet for en fjerdeordens differentiaalligning. Jeg har ikke valgt denne mulighed, idet den netop forudsætter en meget speciel egenskab ved konstruktionen, hvorimod den fremgangsmåde, der er benyttet i det foregående er helt generel.

Sluttelig skal det nævnes, at hvis bøjningsstivheden af søjlen ikke er konstant, men blot varierer lineært med den aksiale koordinat, bliver problemerne væsentlig vanskeligere at håndtere, hvis man insisterer på at finde den eksakte løsning, se i øvrigt det meget enklere tilfælde med en stang med varierende tværsnit i eksempel Ex 1-5. For fuldstændighedens skyld bemærkes, at søjleproblemet's løsning for lineært varierende bøjningsstivhed involverer Besselfunktioner, hvilket ikke ligefrem gør sagerne lettere. I sådanne tilfælde vil man stå sig ved at anvende en eller anden metode, for eksempel baseret på potentiel energi, se eksempel Ex 1-5.4, som er meget simple end søjletilfældet.

Del II

Todimensional Teori

“Stænger og Bjælker Med Tværsnit”

Kapitel 5

Bøjning og Aksial Deformation af Lineærelastiske Tværsnit

5.1 Lineærelastisk Materiale

Ved analyser af bærende konstruktioner er det altid nødvendigt at foretage forenklinger af de fysiske (konstitutive) betingelser, så man får en *materialemodel*, der både er nogenlunde realistisk og beregningsmæssigt bekvem.

Materialemodel

Formentlig er den enkleste antagelse om materialeopførsel, at kraftpåvirkning og deformation er proportionale, se også afsnit 1.2.4. Skønt der ikke findes materialer, der udviser en fuldstændig linearitet mellem forlængelse og påsat belastning, dvs. er *lineærelastisk*, er det den hyppigst anvendte materialemodel, idet formentlig mere end 99% af alle bygningsstatistiske beregninger forudsætter *lineær elasticitet*.

Lineær
elasticitet

5.1.1 Formål

I afsnit 1.2.4 forudsattes en lineær sammenhæng mellem bjælkens *normalkraft* N og dens *aksialtøjning* ε , se (1.9):

$$N(x) = EA(x)\varepsilon(x) \quad (5.1)$$

Først vil vi begrunde denne relation, og derefter vil vi udlede den tilsvarende sammenhæng mellem bjælkens *bøjningsmoment* M og dens *krumningstøjning* κ , se (1.14) eller (1.29):

$$M(x) = EI(x)\kappa(x) \quad (5.2)$$

For en endimensional bjælke, er der ikke nogen tvivl om meningen med begreberne bjælkens aksialtøjning, krumningstøjning, normalkraft og bøjningsmo-

ment. Når vi betragter bjælken som et to- eller tredimensionalt legeme, stiller sagen sig anderledes, som vi skal se i det følgende.

5.1.2 Bjælketværsnit og Bjælkefibre

Strengt taget skulle vi benytte kontinuummekanik, se for eksempel (Byskov 2002a), og behandle bjælken som et tredimensionalt legeme, som vi underkaster visse deformationsbetingelser, som opstilles i det følgende, men vi vil vælge en meget enklere mulighed, nemlig at opfatte bjælken som bestående af “fibre,” se Fig. 5-1.1, som viser en enkelt af disse fibre. Nu skal begrebet “fiber” ikke i denne

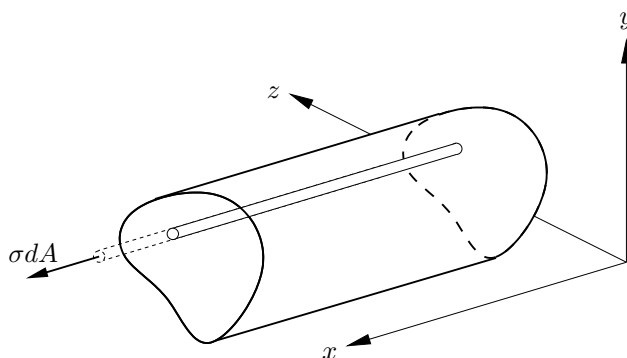


Fig. 5-1.1: Bjælkestykke med en “fiber.”

Bjælkefiber

sammenhæng opfattes bogstaveligt i samme ånd som en træfiber, men snarere som om bjælken er opbygget af uendeligt mange uendeligt tynde tråde eller fibre. Det turde være klart, at en sådan fiber ikke kan forlænges eller forkortes, uden deformation af dens nabofibre.

Før vi kan begynde at udnytte ideen om bjælkefibre, skal vi have opstillet den fysiske betingelse for disse. Til dette formål må vi indføre begrebet *spændingen* σ som grænseværdien af kraft P divideret med arealet A :

$$\sigma \equiv \lim_{A \rightarrow 0} \frac{P}{A} = \frac{dP}{dA} \quad (5.3)$$

hvorved vi kan tolke σ som kraften i en fiber. Helt parallelt til sammenhængen mellem normalkraft og aksialtøjning (5.1) vil vi antage en lineær sammenhæng mellem fiberkraften, dvs. spændingen σ , og dens aksialtøjning ε :

$$\sigma(x) = E(x)\varepsilon(x) \quad (5.4)$$

hvor det er antydnet, at *Elasticitetskoefficienten*, også kaldet *Youngs Modulus*, E kan variere med aksialkoordinaten x . For tværsnittet kan man generelt antage, at fibrenes egenskaber og deformation varierer med tværsnitskoordinaterne (y, z) såvel som med den aksiale koordinat x :

$$\sigma(x, y, z) = E(x, y, z)\varepsilon(x, y, z) \quad (5.5)$$

I første omgang vil vi dog indskrænke os til tilfælde, hvor elasticitetskoefficienten er konstant overalt:

$$\sigma(x, y, z) = E\varepsilon(x, y, z), \quad E = \text{const.} \quad (5.6)$$

hvorved vi indtil videre udelukker os fra at behandle jernbetonbjælker, idet armeringsjern og beton har meget forskellige elasticitetskoefficienter.

Lineariteten mellem spænding σ og tøjning ε er vist på Fig. 5-1.2. Selve sam-

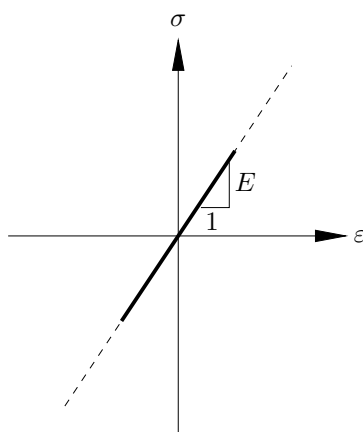


Fig. 5-1.2: Arbejdslinien for "fibre" i et bjælketræsnit af et lineærelastisk materiale.

menhængen mellem tøjning ε og spænding σ kaldes sædvanligvis for materialets *arbejdslinie*. Det bør understreges, at det er et specialtilfælde, vi her har med at gøre, idet sammenhængen er forudsat lineær, medens begrebet arbejdslinie også benyttes for ulineære sammenhænge.

I det følgende vil vi begrænse os til at behandle todimensionale tilstande, dvs. vi forudsætter, at bjælken kun bøjer ud i én retning, nemlig efter y -aksen. Dette kræver yderligere forudsætninger, hvoriblandt symmetri af tværsnittet om y -aksen, se Fig. 5-1.3 er vigtig.

5.1.3 Ren Aksialtøjning

Antager vi, at alle bjælkefibre underkastes samme tøjning $\varepsilon = \text{const.}$ (og forudsættes, at $E = \text{const.}$ overalt), er fiberspændingen σ uafhængig af alle koordinater. Vi kan derfor relativt let integrere fiberspændingen. Idet vi i forventning om at finde (5.1) kalder integralet N , findes:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma dA = \int_A E\varepsilon dA = \varepsilon \int_A E dA \\ N &= EA\varepsilon, \quad EA = \text{const.} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Arbejdslinie —
ikke
nødvendigvis
retliniet

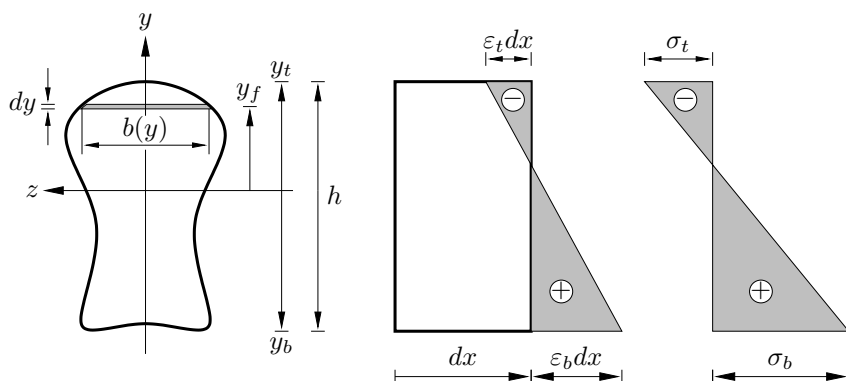


Fig. 5-1.3: Bjælkestykke med en “fiber,” der her strækker sig over hele tværsnittets bredde.

Ud fra de givne forudsætninger om bjælkens deformation har vi fundet relationen mellem normalkraft og aksialtøjning. Herefter vil vi gå over til det mere generelle tilfælde med både aksial- og krumningstøjning.

5.1.4 Aksialtøjning og Krumningstøjning

I afsnit 1.3 er udledt den kinematisk lineære Bernoulli-Euler bjælketæori for retliniede, plane bjælker. Denne teori har aksialtøjningen ε og krumningstøjningen κ som generaliserede tøjninger og normalkraften N og bøjningsmomentet M som deres arbejdskonjugerede generaliserede spændinger, se for eksempel afsnit 2.1 og afsnit 2.2.2. Det vil derfor være rimeligt at finde den fysiske sammenhæng mellem ε og N , henholdsvis mellem κ og M . Efter de indledende betragtninger i afsnit 5.1.3 vil vi derfor udvide analysen til at omfatte et mere generelt tilfælde, nemlig et, der beskrives ved de såkaldte *Bernoulli-Euler Betingelser*, se Fig. 5-1.3 og Fig. 5-1.4:

Aksialtøjning ε
Krumningstøjning κ
Normalkraft N
Bøjningsmoment M

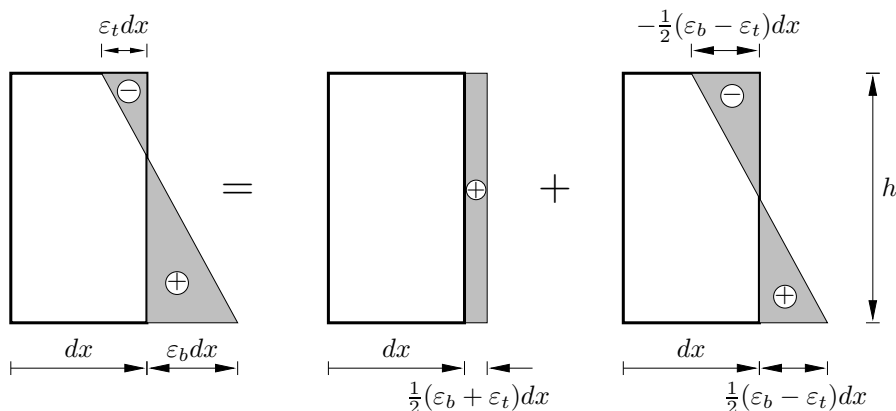


Fig. 5-1.4: Bjælketøjning opdelt i aksial- og bøjningsbidrag.

- Plane tværsnit forbliver plane under deformation,
- Tværsnittene står vinkelret på bjælkeaksen før og efter deformation.

Traditionelt inddrager man også en betingelse om, at bjælketværsnittet ikke bliver større eller mindre ved deformationen. Denne betingelse er ikke relevant, når man baserer udledningerne på betragtninger af bjælkefibre, men er væsentlig, hvis man anvender kontinuummekanik som udgangspunkt.

Når vi forudsætter, at alle deformationer er små, og, som nævnt ovenfor, at tværsnittene forbliver plane, kan den aksiale flytning u af bjælketværsnittets fibre beskrives ved et bilineært udtryk:

$$u(x, y) = c_x(x)(c_0 + c_y y) \quad (5.8)$$

idet aksialflytningen ikke varierer med z . Herved bliver aksialtøjningen ε_f af fibrene:

$$\varepsilon_f(x, y) = \frac{du(x, y)}{dx} = \frac{dc_x(x)}{dx}(c_0 + c_y y) \quad (5.9)$$

Vi mangler at få defineret bjælakens *generaliserede tøjninger*,¹ nemlig dens aksialtøjning ε og dens krumningstøjning κ . Med henvisning til Fig. 5-1.4 opdeler vi fibrenes aksialtøjning i to bidrag, nemlig et, der er konstant, og et, der omfatter resten. Ikke overraskende vil vi identificere det konstante bidrag som bjælakens generaliserede aksialtøjning ε , hvorfor vi må håbe, at resten er knyttet til bjælakens anden generaliserede tøjning, nemlig krumningstøjningen κ . Med betegnelserne fra Fig. 5-1.4 finder vi:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\varepsilon_b + \varepsilon_t) \quad (5.10)$$

Med hensyn til krumningstøjningen κ skal vi igennem et lidt mere kompliceret forløb. Oprindeligt, dvs. i afsnit 1.3, definerede vi bjælakens krumningstøjning κ som krumningen af bjælkeaksen og for det kinematisk lineære tilfælde kunne vi finde, se (1.20):

$$\kappa = \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (5.11)$$

som udtrykker, at krumningstøjningen er lig med ændringen pr. længde af bjælkeaksens vinkel. Nu har vi ved indførelse af Bernoulli-Euler betingelserne sat bjælkeaksens vinkel lig med vinklen af bjælketværsnittet, hvorfor vi altså lige så

¹Strengt taget kan vi ikke tale om generaliserede tøjninger uden at tale om deres arbejds-konjugerede spændinger, idet begrebet generaliserede størrelser omfatter et sæt tøjningsmål og deres arbejdskonjugerede spændinger. Vi gør imidlertid dette i forventning om, at vi kan finde de arbejdskonjugerede spændinger, og at de i øvrigt vil vise sig at bestå af den normalkraft N og det bøjningsmoment M , som vi kender fra kapitel 2.

godt kan finde krumingstøjningen som ændringen pr. længde af bjælketværsnittets vinkel. Af Fig. 5-1.4 kan vi derfor finde:

$$\kappa = \frac{(\varepsilon_b - \varepsilon_t)dx}{dx} \frac{1}{h} = \frac{(\varepsilon_b - \varepsilon_t)}{h} \quad (5.12)$$

I (5.10–5.12) er afhængigheden af x ikke angivet, men det turde være klart, at begge tøjninger generelt set varierer med aksialkoordinaten, se (5.8) og (5.9).

Af hensyn til udregningen af fiberspændingen $\sigma_f(y)$ og den senere udregning af tværsnitskonstanterne A , S og I , se afsnit 5.1.5, vil vi udtrykke fibertøjningen $\varepsilon_f(y)$ ved de generaliserede bjælketøjninger ε og κ :

$$\varepsilon_f(x, y) = \varepsilon(x) - y\kappa(x) \quad (5.13)$$

som ses at være af samme form som (5.9). Minustegnet på andet led skyldes, som det ses af Fig. 5-1.4, at en positiv værdi af κ medfører et negativt bidrag til fibertøjningen i den øverste del af tværsnittet.

5.1.5 Normalkraft, Nulte- og Førsteordens Momenter

Under antagelsen om lineærelastisk opførsel, vil sammenhængen mellem fibertøjningen ε_f og fiberspændingen σ_f være:

$$\sigma_f(x, y, z) = E(x, y, z)\varepsilon_f(x, y) \quad (5.14)$$

hvor den tidligere forudsatte symmetri om y -aksen medfører, at

$$E(x, y, z) = E(x, y, -z) \quad (5.15)$$

Imidlertid vil vi foreløbig forudsætte, at elasticitetskoefficienten E er uafhængig af tværsnitskoordinaterne. Når vi gør dette, bliver fiberspændingerne:

$$\sigma_f(x, y) = E\varepsilon_f(x, y), \quad E = \text{const.} \quad (5.16)$$

Integrerer vi nu fiberspændingen σ_f over tværsnittet, finder vi for $E = \text{const.}$ normalkraften $N(x)$:

$$\begin{aligned} N(x) &= \int_A \sigma_f(x, y) dA = \int_A E\varepsilon_f(x, y) dA = E \int_A \varepsilon_f(x, y) dA \\ &= E \int_A (\varepsilon(x) - y\kappa(x)) dA \end{aligned} \quad (5.17)$$

dvs.

$$N(x) = EA(x)\varepsilon(x) - ES_z(x)\kappa(x), \quad E = \text{const.} \quad (5.18)$$

hvor

$$\begin{aligned} \text{Tværsnitsareal :} \quad A(x) &\equiv \int_{A(x)} dA \\ \text{Statisk moment om } z\text{-aksen :} \quad S_z(x) &\equiv \int_{A(x)} y dA \end{aligned} \quad (5.19)$$

Tværsnitsareal
 A
Statisk moment
 S_z

For fuldstændighedens skyld nævnes, at arealet A er nulteordens momentet af tværsnittet, medens S_y er dets førsteordens moment om z -aksen.

Som det ses, er der to muligheder for at opnå en tilstand med ren normal-kraft, idet dette sker, hvis $\kappa = 0$ eller $S_z = 0$. Den første mulighed er den, der undersøgtes i afsnit 5.1.3, medens den anden stiller krav til beliggenheden af x -aksen. Det er den sidste mulighed, vi vil se på i afsnit 5.1.8.

Nulteordens
moment = Areal
Førsteordens
moment =
Statisk moment

5.1.6 Bøjningsmoment og Andensordens Momenter

Det kan næppe undre, at de spændinger, der er givet ved (5.10), i det generelle tilfælde resulterer i et moment. Derfor udregner vi momentet om z -aksen:

Inertimoment =
Andensordens
moment

$$\begin{aligned} M_z(x) &= - \int_A y \sigma_f(x, y) dA = - \int_A y E \varepsilon_f(x, y) dA \\ &= -E \int_A y \varepsilon_f(x, y) dA = -E \int_A (y \varepsilon(x) - y^2 \kappa(x)) dA \\ &= -\varepsilon(x) E \int_A y dA + \kappa(x) E \int_A y^2 dA \end{aligned} \quad (5.20)$$

dvs.

$$M_z(x) = -E S_z \varepsilon(x) + E I_{zz} \kappa(x) \quad (5.21)$$

hvor

$$\text{Inertimoment om } z\text{-aksen:} \quad I_{zz} \equiv \int_A y^2 dA \quad (5.22)$$

Inertimoment
 I_{zz}

og minustegnet på venstresiden af det første lighedstegn skyldes, at en positiv værdi af σ_f for $y > 0$ medfører et negativt bidrag til bøjningsmomentet M_z .

Her betegner I_{zz} tværsnittets andenordens moment om z -aksen.²

Som det fremgår af (5.18) og (5.21), er spændings-tøjningsrelationerne ikke af den form, vi postulerede (og faktisk retfærdiggjorde) i kapitel 1, idet leddene med S_z ikke fandtes der. Grunden er, at i kapitel 1 var der ikke nogen tvivl om bjælkeaksens beliggenhed. I afsnit 5.1.8 vil vi se nærmere på denne problematik.

5.1.7 Resumé af Konstitutive Relationer for Bjælker

Eftersom vi her alene beskæftiger os med plane bjælker, er den hidtil benyt-

Resumé,
Konstitutive
Relationer for
Bjælker

²Tværsnittet har naturligvis også et tilsvarende andenordens moment, der relateres til y -aksen, nemlig inertimomentet $I_{yy} \equiv \int_A z^2 dA$ om y -aksen. Herudover har tværsnittet også et andenordens moment, centrifugalmomentet $I_{yz} \equiv \int_A yz dA$, der er relateret til såvel z - som y -aksen.

tede notation for bøjningsmoment, statisk moment og inertimoment noget mere komplicerede end strengt nødvendigt — når en enklere notation ikke er valgt fra start, skyldes det et ønske om, at det under udledningen klart fremgår, om hvilke akser, der tages moment. Vi indfører en enklere notation ved:

$$\begin{aligned}
 \text{Tværsnitsareal :} & \quad A \equiv \int_A dA \\
 \text{Statisk Moment om } z\text{-aksen :} & \quad S = S_z \equiv \int_A y dA \\
 \text{Inertimoment om } z\text{-aksen :} & \quad I = I_{zz} \equiv \int_A y^2 dA \\
 \text{Normalkraft :} & \quad N \equiv \int_A \sigma_f dA \\
 \text{Bøjningsmoment om } z\text{-aksen :} & \quad M = M_{zz} \equiv \int_A \sigma_f y dA
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Med disse betegnelser finder vi de konstitutive (fysiske) relationer for de generaliserede størrelser:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & -ES \\ -ES & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{bmatrix} \tag{5.24}$$

hvor afhængigheden af den aksiale koordinat x ikke er angivet. Vi kan invertere denne relation:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{bmatrix} = \frac{1}{E(AI - S^2)} \begin{bmatrix} I & S \\ S & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \tag{5.25}$$

som vi i afsnit 5.1.8 skal benytte til at træffe et valg med hensyn til beliggenheden af x -aksen.

5.1.8 Tværsnittets Akser — Bjælkeakse og Tyngdepunktslinie

Tværsnitsakser

I ovenstående udledninger har vi indlagt x -aksen ganske arbitrært i tværsnittet, hvilket ofte vil vise sig at være en ret dårlig ide. Det kan synes at være et rimeligt krav, at en ren normalkraftpåvirkning ikke må medføre krumningstøjninger af bjælken, ligesom det kan være ønskværdigt, at en ren momentpåvirkning ikke medfører aksialtøjning af bjælken. Disse to betingelser ligger da også gemt bag udledningerne af de strengt endimensionale teorier for stænger og bjælker i afsnit 1.2.1, henholdsvis afsnit 1.3.1, idet vi uden videre identificerede bjælkeaksen med den fysiske konfiguration af det endimensionale legeme. Som det ses af (5.25), opnår vi, at disse ønsker opfyldes, såfremt det statiske moment $S = 0$. Vi kan netop benytte denne betingelse til fastlæggelse af bjælkeaksens beliggenhed.

Træffer vi dette valg, vil aksialspændingen σ_f for ren bøjning være nul i bjælkeaksen, og man siger, at bjælkeaksen og *nullinien* falder sammen. Sagt på anden måde, er nullinien defineret som den linie, som ikke undergår aksialtøjninger for ren momentpåvirkning.

Når det blev kaldt en ret dårlig ide at lade bjælkeaksen ligge et andet sted end i nullinien, skal det tages med et gran salt, idet det faktisk undertiden kan være praktisk at lade den ligge et andet sted. For eksempel kan det være hensigtsmæssigt i forbindelse med systemer af koblede bjælker.

5.1.9 Bjælkeaksen i Tyngdepunktslinien

Hvis vi vælger — vi skal se et par eksempler på, hvordan dette gøres — at bjælkeaksen og tyngdepunktslinien falder sammen, finder vi:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

og

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(EA) & 0 \\ 0 & 1/(EI) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

I langt de fleste tilfælde vil vi vælge bjælkeaksen sammenfaldende med tyngdepunktslinien, og (5.26) og (5.27) vil derfor være de konstitutive relationer, vi som oftest vil benytte.

5.1.10 Resultaternes Uafhængighed af Bjælkeaksens Beliggenhed

Det ville være særdeles uheldigt, hvis valget af bjælkeakse skulle få indflydelse på

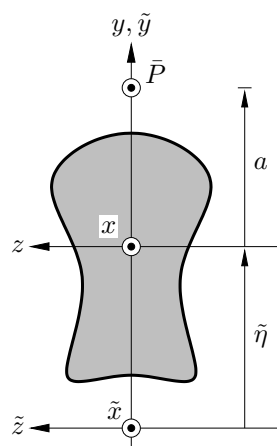


Fig. 5-1.5: Bjælkeakser.

Nullinie

Bjælkeaksen i tyngdepunktslinien.

Resumé:
Konstitutive relationer for bjælker

Tøjninger og spændinger afhænger ikke af valg af bjælkeakse

de endelige resultater, såsom tøjnings- og spændingsfordelingen over tværsnittet. Hvis det var tilfældet, ville det betyde, at de fysiske resultater var afhængige af valget af koordinatsystem, hvilket klart er uacceptabelt. Beskrivelsen ville i så fald ikke være *objektiv*, hvilket ville svare til, at en bils fart ville være afhængig af det koordinatsystem, man benyttede.³ Som vi skal se, er dette heller ikke tilfældet.

Vi tager udgangspunkt i Fig. 5-1.5, der viser et tværsnit med en vilkårlig valgt bjælkeakse \tilde{x} -aksen og x -aksen, der ligger i tyngdepunktslinien, og som ligger i afstanden $\tilde{\eta}$ fra \tilde{x} -aksen.⁴ Hvis de to akser ligger som vist på figuren, er $\tilde{\eta} > 0$, idet $\tilde{\eta}$ regnes med fortegn. Vi vil antage, at belastningen på tværsnittet er således, at resultanten \bar{P} ligger i afstanden a over tyngdepunktsaksen, x -aksen. Som det er tilfældet for $\tilde{\eta}$, regnes a med fortegn, hvorfor $a > 0$ på figuren.

Af Fig. 5-1.5 findes umiddelbart:

$$\tilde{y} = y + \tilde{\eta} \quad (5.28)$$

hvor tilde ($\tilde{}$) angiver, at den berørte størrelse er refereret til $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ -koordinatsystemet.⁵

Som det ses af Fig. 5-1.5, gælder det om bjælkens snitkræfter refereret til z -, henholdsvis \tilde{z} -aksen, at:

$$\begin{aligned} N &= \bar{P}, & M &= -a\bar{P} \\ \tilde{N} &= \bar{P}, & \tilde{M} &= -(a + \tilde{\eta})\bar{P} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Under benyttelse af (5.23) findes for størrelserne refereret til z -aksen:

$$\begin{aligned} A &= \int_A dA \\ S &= \int_A y dA = 0 \\ I &= I_{zz} = \int_A y^2 dA \end{aligned} \quad (5.30)$$

³På engelsk taler man om, at resultaterne skal være *frame indifferent*.

⁴Der ligger ikke nogen indskrænkning i at antage, at belastningen på tværsnittet er, som antaget her, idet en vilkårlig belastning, der er symmetrisk om y -aksen, enten kan være givet som en enkeltkraft \bar{P} i en given afstand fra tyngdepunktslinien, eller som den samme kraft i en anden afstand suppleret med et moment \bar{C} , der er givet ved \bar{P} multipliceret med differensen mellem de to afstande.

⁵I denne forbindelse er betydningen af tilden vel i øvrigt indlysende.

Tilsvarende kan vi finde formler for størrelserne refereret til \tilde{z} -aksen:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \int_A dA = A \\ \tilde{S} = S_{\tilde{z}} &= \int_A \tilde{y} dA = \int_A (y + \tilde{\eta}) dA = S + \tilde{\eta}A = +\tilde{\eta}A \\ \tilde{I} = I_{\tilde{z}\tilde{z}} &= \int_A \tilde{y}^2 dA = \int_A (y^2 + 2y\tilde{\eta} + \tilde{\eta}^2) dA = I + 2\tilde{\eta}S + \tilde{\eta}^2 A \\ &= I + \tilde{\eta}^2 A\end{aligned}\tag{5.31}$$

hvoraf ses, at det statiske moment \tilde{S} er lig med afstanden $\tilde{\eta}$ til tyngdepunktsaksen multipliceret med tværsnitsarealet A , og at inertimomentet \tilde{I} er lig med inertimomentet I om tyngdepunktsaksen plus kvadratet på afstanden fra tyngdepunktsaksen multipliceret med tværsnitsarealet. Disse to resultater skal vise sig at være meget anvendelige.

Ved at indsætte 5.29 i 5.27 findes:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(EA) & 0 \\ 0 & 1/(EI) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P} \\ -a\bar{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}/(EA) \\ -a\bar{P}/(EI) \end{bmatrix}\tag{5.32}$$

Ved benyttelse af (5.13) og (5.29), kan fibertøjningen ε_f udtrykkes ved:

$$\varepsilon_f = \varepsilon - y\kappa = \frac{\bar{P}}{EA} + y\frac{a\bar{P}}{EI}\tag{5.33}$$

Tilsvarende findes ved anvendelse af (5.25) og (5.31):

$$\begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon} \\ \tilde{\kappa} \end{bmatrix} = \frac{1}{EAI} \begin{bmatrix} (I + \tilde{\eta}^2 A) & +\tilde{\eta}A \\ +\tilde{\eta}A & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P} \\ -(a + \tilde{\eta})\bar{P} \end{bmatrix}\tag{5.34}$$

hvor det er udnyttet, at:

$$\tilde{A}\tilde{I} - \tilde{S}^2 = AI\tag{5.35}$$

Herefter findes:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon} \\ \tilde{\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{P}}{EA} + \tilde{\eta}\frac{a\bar{P}}{EI} \\ -\frac{a\bar{P}}{EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon + \tilde{\eta}\kappa \\ \kappa \end{bmatrix}\tag{5.36}$$

hvor (5.32) er udnyttet. Endelig findes af (5.36) og (5.13):

$$\tilde{\varepsilon}_f = \tilde{\varepsilon} - \tilde{y}\tilde{\kappa} = (\varepsilon + \tilde{\eta}\kappa) - (y + \tilde{\eta})\kappa = \varepsilon - y\kappa = \varepsilon_f\tag{5.37}$$

hvorved det er vist, at valget af bjælkeakse ikke influerer på de fysiske resultater, og at der således er tale om en objektiv beskrivelse.

5.1.11 Fordelingen af Aksialtøjning og Aksialspænding

Fibertøjning:
Lineær over
tværsnittet

Af afsnit 5.1.10 konkluderede vi, at fibertøjningen ε_f er:

$$\varepsilon_f = \varepsilon - y\kappa \quad (5.38)$$

hvilket betyder, at fibertøjningen ε_f er lineært fordelt over tværsnittet, se også Fig. 5-1.3. Forudsætter vi lineær elasticitet, vil fiberspændingen σ_f også have en lineær fordeling, idet den konstitutive model (5.16) og (5.38) tilsammen giver:

Fiberspænding:
Lineær over
tværsnittet

$$\sigma_f = E(\varepsilon - y\kappa) \quad (5.39)$$

Udnytter vi de konstitutive relationer (5.26), kan vi udtrykke fiberspændingen ved normalkraften og bøjningsmomentet:

$$\sigma_f = \frac{N}{A} - y \frac{M}{I} \quad (5.40)$$

Naviers formel

Denne formel kendes i litteraturen som *Naviers Formel*.

Hensynet til en enkel nomenklatur bevirker, at vi senere vil udelade nedre index $_f$ og blot tale om aksialtøjningen ε , og aksialspændingen σ i stedet for fibertøjningen ε_f og fiberspændingen σ_f . Når vi senere vil referere til bjælkeaksens tøjning og spænding, må vi derfor angive dette eksplicit. En ret gængs notation består i at benytte nedre index $_0$, som angiver, at der er tale om nullinien. Skulle vi ønske at benytte en anden bjælkeakse end nullinien, må vi anvende en anden indicering.

5.1.12 Eksempler på Beregning af Inertimomenter

Det første eksempel, vi vil behandle, nemlig det rektangulære tværsnit, er vigtigt i sig selv, men resultaterne fra det indgår i mange andre sammenhænge, såsom eksemplerne Ex 5-3 og Ex 5-4.

Ex 5-1 Rektangulært Bjælketværsnit

Det rektangulære bjælketværsnit, se Fig. Ex. 5-1.1, er nok det simpleste eksempel i denne forbindelse. Den beliggenhed af bjælkeaksen, som bevirker, at det statiske moment S bliver lig med 0, er angivet med z , medens \tilde{z} betegner den bjælkeakse, vi har indlagt, som det passer os. Når vi har lagt den i bunden af tværsnittet, skyldes det alene, at nedenstående beregninger derved bliver enklest.

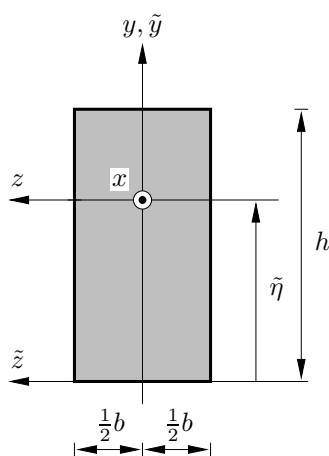


Fig. Ex. 5-1.1: Rektangulært bjælketværsnit.

Under benyttelse af (5.23) findes for størrelserne refereret til \tilde{z} -aksen:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \int_A dA = bh \\ \tilde{S} &= S_{\tilde{z}} = \int_A \tilde{y} dA = \frac{1}{2}bh^2 \\ \tilde{I} &= I_{\tilde{z}\tilde{z}} = \int_A \tilde{y}^2 dA = \frac{1}{3}bh^3\end{aligned}\tag{Ex. 5-1.1}$$

På lignende vis finder vi for størrelserne refereret til z -aksen:

$$\begin{aligned}A &= \int_A dA = bh \\ S &= S_z = \int_A y dA = b \int_{-\tilde{\eta}}^{h-\tilde{\eta}} y dy = \frac{1}{2}b(h^2 - 2h\tilde{\eta}) \\ I &= I_{zz} = \int_A y^2 dA = \frac{1}{3}b(h^3 - 3h^2\tilde{\eta} + 3h\tilde{\eta}^2 - 2\tilde{\eta}^3)\end{aligned}\tag{Ex. 5-1.2}$$

Benytter vi nu kravet $S = 0$, findes:

$$S = 0 \Rightarrow \tilde{\eta} = \frac{1}{2}h\tag{Ex. 5-1.3}$$

dvs.

$$I = \frac{1}{12}bh^3\tag{Ex. 5-1.4}$$

Det er næppe overraskende, at x -aksen i dette tilfælde ligger midt i bjælketværsnittet, idet rektanglets tyngdepunkt naturligvis falder midt i tværsnittet.⁶

⁶For god ordens skyld nævnes, at resultatet $I = \frac{1}{12}bh^3$, se (Ex. 5-1.4), er et af dem, som studerende forventes at kunne udenad.

Også det næste eksempel er meget grundlæggende og næsten lige så simpelt som Ex 5-1, idet cirkulære tværsnit benyttes i mange konstruktioner. Dette gælder for eksempel mange af de mest almindelige danske højspændingsmaster.

Ex 5-2 Cirkulært Bjælketværsnit

Som det andet eksempel på bjælketværsnit vælger vi det cirkulære, se Fig. Ex. 5-2.1. Det skulle være ret klart, at tyngdepunktet falder sam-

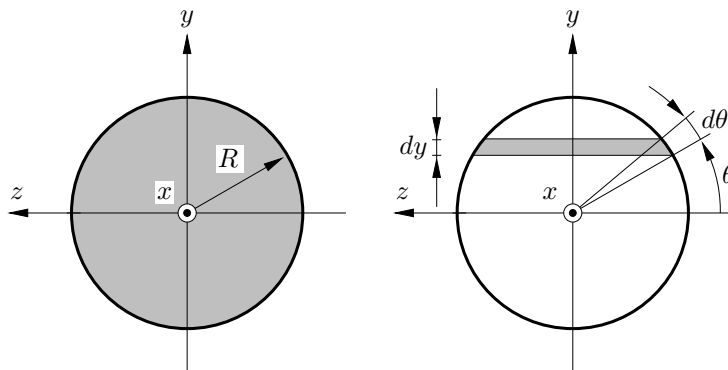


Fig. Ex. 5-2.1: Cirkulært bjælketværsnit.

men med cirkelns centrum, hvorfor vi med det samme kan indlægge x, y, z -koordinatsystemet. Vi benytter igen (5.23) og finder:

$$y = R \sin \theta$$

$$dy = R \cos \theta d\theta \quad (\text{Ex. 5-2.1})$$

$$dA = (2R \cos \theta) dy = 2R^2 \cos^2 \theta d\theta$$

hvorved vi kan finde:

$$\begin{aligned} A &= \int_A dA = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} 2R^2 \cos^2 \theta d\theta = \pi R^2 \\ S &= \int_A y dA = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} 2R^3 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = 0 \\ I &= \int_A y^2 dA = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} 2R^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4} R^4 \end{aligned} \quad (\text{Ex. 5-2.2})$$

hvor resultatet (Ex. 5-2.2a) formentlig er kendt i forvejen, og (Ex. 5-2.2b) er det forventede.

Undertiden ønsker man at udtrykke resultaterne ved cirkelns diameter d eller ved dens areal A :

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi}{4} d^2 \\ I &= \frac{\pi}{64} d^4 = \frac{1}{4} AR^2 = \frac{1}{16} Ad^2 \end{aligned} \quad (\text{Ex. 5-2.3})$$

De to første eksempler på tværsnit er karakteriseret ved, at de begge omhandler simple tværsnit. Ved beregningen af de to næste vil vi udnytte resultatet fra eksempel Ex 5-1 i forbindelse med (5.31c), som angiver, hvorledes inertimomentet om en anden akse end tyngdepunktsaksen beregnes.

Ex 5-3 T-Formet Bjælketværsnit

Man benytter ofte T-formede bjælketværsnit, se Fig. Ex. 5-3.1, i forskellige konstruktioner. Vi vil her udnytte nogle af de resultater, vi fandt i eksem-

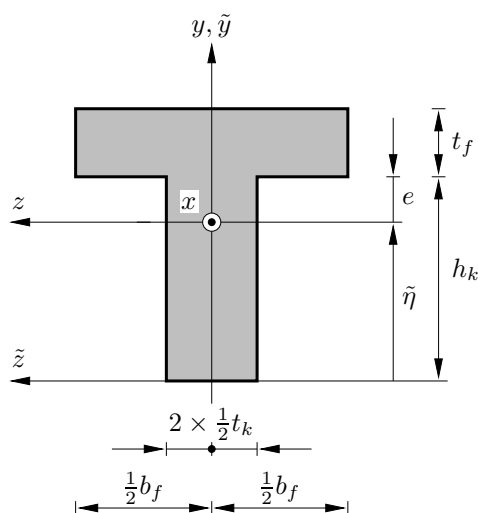


Fig. Ex. 5-3.1: T-formet bjælketværsnit.

pel Ex 5-1 samt (5.31).

Der er selvfølgelig ikke noget "korrekt" valg af $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ -koordinatsystemet, bortset fra, at det skal overholde symmetrien. To muligheder falder i øjnene, nemlig, som det fremgår af Fig. Ex. 5-3.1, at vælge \tilde{x} -aksen i bunden af tværnittet, eller at lægge \tilde{x} -aksen i skillelinien mellem krop og flange. Med reference til figuren findes umiddelbart:

$$\begin{aligned}
 A_k &= t_k h_k \\
 A_f &= t_f b_f \\
 A &= A_k + A_f = t_k h_k + t_f b_f \\
 S_k &= A_k \left(\frac{1}{2} h_k - \tilde{\eta} \right) = -h_k t_k \left(\tilde{\eta} - \frac{1}{2} h_k \right) \\
 S_f &= A_f \left(h_k + \frac{1}{2} t_f - \tilde{\eta} \right) = b_f t_f \left(h_k + \frac{1}{2} t_f - \tilde{\eta} \right) \\
 S &= S_k + S_f = A_f \left(h_k + \frac{1}{2} t_f - \tilde{\eta} \right) + A_k \left(\frac{1}{2} h_k - \tilde{\eta} \right)
 \end{aligned} \tag{Ex. 5-3.1}$$

hvor index $_k$ angiver størrelser, der er knyttet til kroppen, og index $_f$ tilsvarende indikerer flangen. Når vi kræver, at det statiske moment S om

z -aksen er lig med nul, finder vi:

$$\tilde{\eta} = \frac{h_k(2A_f + A_k) + t_f A_f}{2A} = \frac{t_k h_k^2 + 2b_f h_k t_f + b_f t_f^2}{2(b_f t_f + h_k t_k)} \quad (\text{Ex. 5-3.2})$$

Afstanden e fra skillelinien mellem krop og flange til tyngdepunktet er da:

$$e = h_k - \tilde{\eta} = \frac{h_k^2 t_k - b_f t_f^2}{2A} \quad (\text{Ex. 5-3.3})$$

Herefter kan vi beregne inertiomentet I :

$$I = A_k(\tilde{\eta} - \frac{1}{2}h_k)^2 + \frac{1}{12}t_k h_k^3 + A_f(e + \frac{1}{2}t_f)^2 + \frac{1}{12}t_f^3 b_f \quad (\text{Ex. 5-3.4})$$

eller

$$I = A_k(e - \frac{1}{2}h_k)^2 + \frac{1}{12}t_k h_k^3 + A_f(e + \frac{1}{2}t_f)^2 + \frac{1}{12}t_f^3 b_f \quad (\text{Ex. 5-3.5})$$

eller

$$I = A_k(e - \frac{1}{2}h_k)^2 + \frac{1}{12}A_k h_k^2 + A_f(e + \frac{1}{2}t_f)^2 + \frac{1}{12}A_f t_f^2 \quad (\text{Ex. 5-3.6})$$

Medens vi ved behandlingen af T-tværsnittet i eksempel Ex 5-3 ikke gjorde nogen forudsætninger om tykkelse af krop og flange, vil vi i det næste eksempel, nemlig Ex 5-4, udnytte, at krop og flanger i de mest anvendte I-profiler er ganske tynde i forhold til tværsnittets højde og bredde.

Ex 5-4 Tyndfliget I-Formet Bjælketværsnit

I et utal af forskellige konstruktioner anvender man tyndfligede, dobbeltsymmetriske I-formede bjælketværsnit, se Fig. Ex. 5-4.1, idet sådanne tværsnit ved et ret begrænset materialeforbrug yder en særdeles god stivhed og styrke mod bøjning om z -aksen samtidig med en mindre, men til mange formål tilstrækkelig, stivhed mod udbøjning om y -aksen. Vi vil atter benytte os af nogle af de resultater, vi fandt i eksempel Ex 5-1 samt (5.31). Vi kan med det samme konstatere, at tyngdepunktslinien må være sammenfaldende med x -aksen, hvilket gør de følgende beregninger lettere. Ved "tyndfliget" vil vi forstå, at flangernes tykkelse t_f og kroppens tykkelse t_k er små i forhold til tværsnittets højde h og dets bredde b .⁷ Udtrykt på matematisk vis forudsætter vi:

$$\begin{aligned} t_f \ll h &\implies h_k \approx h; & t_f \ll b \\ t_k \ll b; & t_k \ll h \end{aligned} \quad (\text{Ex. 5-4.1})$$

Med de på Fig. Ex. 5-4.1 angivne betegnelser finder vi:

$$\begin{aligned} A_k &= t_k h_k \approx t_k h \\ A_f &= t_f b \\ A &= A_k + A_f = t_k h_k + t_f b \approx t_k h + t_f b \\ I &= \frac{1}{12}t_k h_k^3 + 2A_f\left(\frac{1}{2}(h_k + t_f)\right)^2 + 2\frac{1}{12}b t_f^3 \end{aligned} \quad (\text{Ex. 5-4.2})$$

⁷Af hensyn til beregningen af inertiomentet om z -aksen er det ikke nødvendigt at inddrage betingelser med hensyn til kroppens tykkelse og flangernes bredde. Sagen er blot, at man for eksempel næppe ville finde på at vælge en tykkelse af kroppen af samme størrelsesorden som bjælkehøjden.

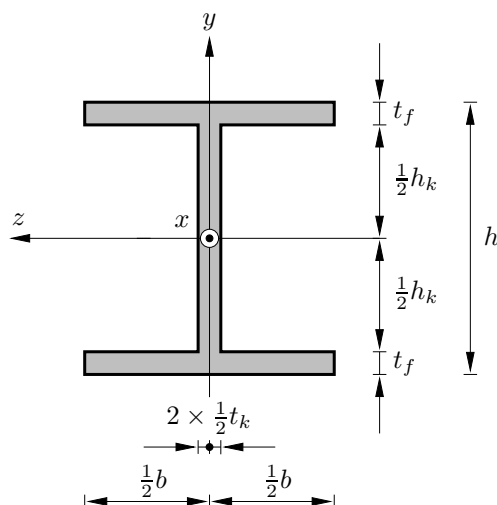


Fig. Ex. 5-4.1: I-formet bjælketværsnit.

hvoraf vi kan finde:

$$I \approx \frac{1}{12} h_k^3 t_k + 2 h_k^2 b t_f = \frac{1}{12} A_k h_k^2 + 2 A_f h_k^2 \quad (\text{Ex. 5-4.3})$$

eller

$$I \approx \left(1 + 6 \frac{A_f}{A_k}\right) \frac{1}{12} A_k h_k^2 = \left(1 + 6 \frac{A_f}{A_k}\right) I_k \quad (\text{Ex. 5-4.4})$$

hvor I_k betegner kroppens inertimoment, eller:

$$I \approx \left(1 + \frac{A_k}{24 A_f}\right) I_F \quad (\text{Ex. 5-4.5})$$

hvor I_F betegner inertimomentet fra begge flanger. Af (Ex. 5-4.4) og (Ex. 5-4.5) fremgår, at det bedre kan betale sig at lægge materiale i flangerne end i kroppen, såfremt der kun tages hensyn til bøjningsstivheden af tværsnittet. Hvis man gør kroppen for tynd, kan der ske katastrofer af forskellig karakter. Enten folder kroppen, dvs. undergår et stabilitetssvigt, eller kroppen kan ikke overføre forskydningsspændingerne⁸ mellem flangerne, og kroppen går i stykker.

Som det sidste eksempel vil vi behandle et tværsnit udformet som et rør med cirkulært tværsnit. I forskellige gitterkonstruktioner anvender man stænger med dette tværsnit, eftersom det materialeøkonomisk er fordelagtigt, især over for vridningspåvirkninger, medens dets bøjningsstivhed er mindre økonomisk end I-tværsnittet, som til gengæld har en meget lav vridningsstivhed.

⁸Vi har endnu ikke beskæftiget os med begrebet *forskydningsspændinger*, så læseren må stole på rigtigheden i udsagnet. Vi skal imidlertid i kapitel 6 introducere disse størrelser.

Ex 5-5 Rørformet, Cirkulært Bjælketværsnit

I dette eksempel vil vi finde bøjningsinertimomentet af en cirkelring som vist på Fig. Ex. 5-5.1. Vi kan her udnytte resultatet (Ex. 5-2.3b), idet vi her

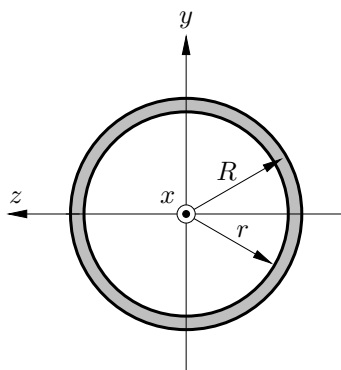


Fig. Ex. 5-5.1: Rørformet, cirkulært bjælketværsnit.

kan trække inertimomentet I_r af cirklen med radius r fra inertimomentet I_R af cirklen med radius R .⁹

$$I_R = \frac{\pi}{4}R^4, \quad I_r = \frac{\pi}{4}r^4, \quad I = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4) \quad (\text{Ex. 5-5.1})$$

Når vi indfører:

$$r = R - t \quad (\text{Ex. 5-5.2})$$

hvor t er rørets godstykkelse, kan vi finde:

$$I = \frac{\pi}{4}(R^4 - (R - t)^4) \quad (\text{Ex. 5-5.3})$$

Når vi forudsætter $t \ll R$, bliver resultatet:

$$I \approx \pi R^3 t \quad (\text{Ex. 5-5.4})$$

⁹Vi kan gøre dette, fordi begge cirkler har sammenfaldende tyngdepunkter.

Kapitel 6

Forskydningsspændinger i Bjælker

Indtil nu har vi alene beskæftiget os med normal- eller aksialspændinger, idet vi tog udgangspunkt i en antagelse om, at bjælken består af fibre, der kan forlænges eller forkortes. Dette falder i god tråd med teorien for Bernoulli-Euler bjælker, hvis generaliserede tøjninger er aksialtøjningen ε og krumningstøjningen κ , medens det for dem forudsættes, at forskydningstøjningen er nul. Af denne grund har disse bjælker kun to generaliserede spændinger, nemlig normalkraften N , som er arbejdskonjugeret med ε og bøjningsmomentet M , som er arbejdskonjugeret med κ . Dette forhold betyder ikke, at der ikke optræder forskydningskræfter i Bernoulli-Euler bjælker, men blot at forskydningskraften ikke har en arbejdskonjugeret tøjning og derfor ikke kan beregnes ud fra en konstitutiv (fysisk) betingelse.¹

Man siger undertiden, at forskydningskraften i Bernoulli-Euler bjælker er en reaktion på det kinematiske bånd, som kræver, at forskydningstøjningen er nul. Egentlig er dette ikke så forfærdelig meget anderledes end ideen om, at en understøtningskraft er en reaktion på det kinematiske bånd, der siger, at den tilsvarende translation af understøtningen er nul. Helt tilsvarende til disse forhold optræder der *forskydningsspændinger* τ i Bernoulli-Euler bjælker, skønt der ikke forekommer forskydningstøjninger i dem. Når man nu ikke kan beregne forskydningsspændingen ud fra en konstitutiv betingelse, er der kun én mulighed, nemlig at benytte ligevægtsligninger. Dette var også den måde, hvorpå forskydningskraften V blev indført ved (4.19), p. 119.² Det synes rimeligt allerede nu

Fiberantagelse
kun god for
aksialtøjninger

Bernoulli-Euler
bjælker:
Forskydnings-
tøjning $\equiv 0$,
Forskydnings-
kraft $\neq 0$,
Forskydnings-
spænding $\neq 0$

¹Det skulle være ret indlysende, at man ikke kan undvære forskydningskraften i Bernoulli-Euler bjælker, se for eksempel Fig. Ex. 1-2.1, p. 29. Hvis vi antog, at der ikke forekom forskydningskræfter, ville den indre ligevægt i bjælken ikke kunne opretholdes.

²Når V ikke blev indført på tilsvarende vis i afsnit 1.3, skyldes det, at vi på det tidspunkt ikke havde beskæftiget os med virtuelle arbejder og derfor benyttede en mere direkte, men også mere gammeldags metode til opstilling af ligevægtsligningerne.

at betone, at formlerne for forskydningsspændingerne over et tværsnit ikke kan udledes så let som den formel (2.24), der definerer forskydningskraften V som den afledede af bøjningsmomentet M .

6.1 Hvad Er Forskydningsspændinger?

Inden vi kan begynde at udlede formler for forskydningsspændinger, er det nødvendigt at have defineret dette begreb. I det mindste bør vi have en rimelig ide om begrebet. Hidtil har vi kun beskæftiget os med *normalspændingen* (*aksi-*

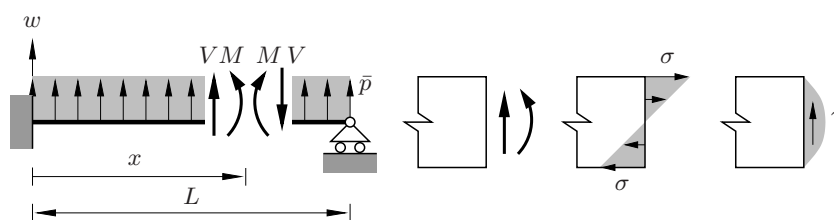


Fig. 6-1.1: Bjælke med tværlast, opfattet endimensionalt og todimensionalt.

alspændingen) σ i Bernoulli-Euler bjælker, idet disses resultant er lig med den ene generaliserede spænding, normalkraften N , og deres resulterende moment er lig med den anden generaliserede spænding, bøjningsmomentet M . Vi har derimod ikke forsøgt at opfatte forskydningskraften V i Bernoulli-Euler bjælker som andet end en hjælpestørrelse, idet den ikke er en generaliseret spænding — den har ikke nogen arbejdskonjugeret tøjning i disse bjælker. Det har derfor ikke umiddelbart været interessant, om forskydningskraften kunne findes som resultanten af nogle spændinger τ , som vi naturligt nok vil kalde forskydningsspændinger.³ Til venstre på Fig. 6-1.1 er vist en bjælke påvirket af tværlasten \bar{p} , og til højre er et stykke af bjælken skitseret, idet den er opfattet som et todimensionalt legeme. Skitserne angiver forskydningskraften V og bøjningsmomentet M samt de spændinger, nemlig normalspændingen σ og forskydningsspændingen τ , som M , henholdsvis V , er dannet af.⁴

6.2 Formler for Forskydningsspændinger

På Fig. 6-1.1 er fordelingen i lodret retning af forskydningsspændingen τ over tværsnittet skitseret, medens dens fordeling vinkelret på papirets plan ikke fremgår. Vi skal imidlertid antage, at τ er konstant i denne retning, dvs. i z -retningen.

³For god ordens skyld nævnes, at undertiden kaldes forskydningskraften for *tværkraften* og i forlængelse heraf benævnes forskydningsspændingen ofte *tværspændingen*. Medens man med nogen ret kan benytte betegnelse tværkraft, idet V står vinkelret på bjælkeaksen, er begrebet tværspænding meget mere problematisk, idet τ , som vi skal se, *ikke* står vinkelret på bjælketværsnittet, hvorimod normalspændingen σ gør det.

⁴Som det fremgår af Fig. 6-1.1, er bjælken kun belastet på tværs, medens den ikke er påvirket af en aksiallast. Dette er gjort af hensyn til et ønske om, at figuren er nogenlunde enkel.

Denne forudsætning, som ofte har vist sig at være rimelig, kan ikke begrundes ud fra simple overvejelser af statisk eller kinematisk karakter.

6.2.1 Lidt Kontinuummekanik

Nogle af de følgende udledninger kan meget nemt komme til at fremstå som resultatet af en mellemtung mellem voodoo og guddommelige indskydelser, medmindre man har lidt begreb om kontinuummekanik, dvs. læren om kontinuers deformation og ligevægt. I nærværende forbindelse har vi alene brug for udsagn vedrørende ligevægten af et infinitesimalelement af en *skive*,⁵ se Fig. 6-2.2.

Voodoo og guddommelige indskydelser

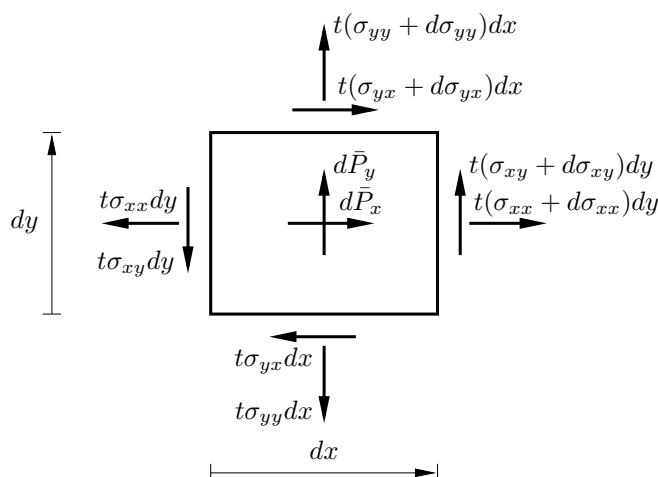


Fig. 6-2.2: Et infinitesimalelement.

Skiven er belastet af $t\bar{p}_x$ pr. arealenhed i x -retningen og af $t\bar{p}_y$ pr. arealenhed i y -retningen, hvor \bar{p}_x og \bar{p}_y har dimensionen [kraft/længde³], og t betegner skivens tykkelse. På det viste infinitesimale skiveelement $dx dy$ giver disse belastninger de to resultanter $d\bar{P}_x$ og $d\bar{P}_y$:

Skive

$$\begin{aligned} \text{I } x\text{-retningen:} \quad d\bar{P}_x &= t\bar{p}_x dx dy \\ \text{I } y\text{-retningen:} \quad d\bar{P}_y &= t\bar{p}_y dx dy \end{aligned} \quad (6.1)$$

Til at holde ligevægt med disse belastninger fordres de øvrige på figuren viste kræfter, hvis retninger i øvrigt er bestemt ud fra erfaring og hensynet til en konsistent notation. Som eksempel virker der på den venstre flade i x -retningen en kraft, der i alt er $t\sigma_{xx} dy$, hvor dimensionen af σ_{xx} er [kraft/længde²]. På den højre side er *spændingen*⁶ σ_{xx} ændret til $(\sigma_{xx} + d\sigma_{xx})$, hvorfor kraften på denne

⁵En skive er et legeme, hvis ene udstrækning er meget mindre end dets to andre dimensioner, der siges at danne skivens plan. En skive er kun belastet i sin egen plan, hvorimod en *plade* også er belastet vinkelret på sin plan.

⁶I denne forbindelse skal betegnelsen spænding forstås anderledes, end vi er vant til i forbindelse med bjælkers generaliserede spændinger. I realiteten er σ_{xx} , osv. de grundlæggende spændinger i et tredimensionalt kontinuum, dvs. i en mere korrekt model af virkeligheden.

side er som angivet på figuren. Lignende betragtninger er gyldige for de øvrige kræfter. Normalt ønsker man at finde ligevægtsligningerne for det infinitesimale skiveelement, dvs. de relationer, der knytter spændingerne⁷ σ_{xx}, σ_{xy} , osv. sammen med belastningerne \bar{p}_x og \bar{p}_y . Her vil det vise sig, at det faktisk kun er den ene af de tre ligevægtsligninger, nemlig den der vedrører momentligevægt, der har interesse i forbindelse med udledningen af formler for forskydningsspændinger i bjælker. Af hensyn til fuldstændigheden vil vi imidlertid også opstille de to andre ligevægtsligninger, som har at gøre med ligevægt i retning af de to akser.

$$\begin{aligned}
 \text{I } x\text{-retningen : } \quad & 0 = -t\sigma_{xx}dy + t(\sigma_{xx} + d\sigma_{xx})dy \\
 & \quad -t\sigma_{yx}dx + t(\sigma_{yx} + d\sigma_{yx})dx \\
 & \quad +t\bar{p}_xdxdy \\
 \text{I } y\text{-retningen : } \quad & 0 = -t\sigma_{yy}dx + t(\sigma_{yy} + d\sigma_{yy})dx \\
 & \quad -t\sigma_{xy}dy + t(\sigma_{xy} + d\sigma_{xy})dy \\
 & \quad +t\bar{p}_ydxdy \\
 \text{Momentet : } \quad & 0 = +\frac{1}{2}dx t\sigma_{xy}dy + \frac{1}{2}dx t(\sigma_{xy} + d\sigma_{xy})dy \\
 & \quad -\frac{1}{2}dy t\sigma_{yx}dx - \frac{1}{2}dy t(\sigma_{yx} + d\sigma_{yx})dx
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

hvor den sidste ligning udtrykker momentligevægt om midtpunktet af det infinitesimale skiveelement. Efter ret elementære omskrivninger kan vi finde:

$$\begin{aligned}
 \text{I } x\text{-retningen : } \quad & 0 = d\sigma_{xx} + d\sigma_{yx} + \bar{p}_x \\
 \text{I } y\text{-retningen : } \quad & 0 = d\sigma_{yy} + d\sigma_{xy} + \bar{p}_y \\
 \text{Momentet : } \quad & 0 = \sigma_{xy} - \sigma_{yx}
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

hvor det er udnyttet, at $|d\sigma_{xx}| \ll |\sigma_{xx}|$, osv. Efter indførelse af partielle afledede i de to første udtryk og omordning af det tredje, findes:

$$\begin{aligned}
 \text{I } x\text{-retningen : } \quad & 0 = \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y} + \bar{p}_x \\
 \text{I } y\text{-retningen : } \quad & 0 = \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \bar{p}_y \\
 \text{Momentet : } \quad & \sigma_{xy} = \sigma_{yx}
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

hvor den tredje ligning viser, at *forskydningsspændingerne* σ_{xy} og σ_{yx} er lige store, hvilket man også kan udtrykke ved at sige, at *spændingstensoren*⁸ er symmetrisk. Som det fremgår af Fig. 6-1.1, vil vi benytte symbolet τ til at angive en

⁷Som mange af mine studerende og kolleger ved, kan jeg normalt ikke fordrage betegnelserne σ_{xx}, σ_{xy} , osv., men insisterer på at benytte betegnelserne σ_{11}, σ_{12} , osv., men netop i denne sammenhæng vil den her benyttede notation nok være mindre fjern for de studerende.

⁸Benytter man den ovenfor omtalte notation $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}$ i forbindelse med *indexnotationen* $\sigma_{\alpha\beta}, (\alpha, \beta) = (1, 2)$, vil betegnelsen *spændingstensor* give mere mening.

forskydningsspænding, hvilket er i overensstemmelse med en indarbejdet tradition. I samme ånd skrev man ikke σ_{xy} , men τ_{xy} samtidig med at man bibeholdt σ_{xx} , osv., hvilket unægtelig ikke fremmede nogen form for systematik. Når vi alligevel her bruger betegnelserne τ for forskydningsspændingen og σ for normalspændingen, har det to årsager. Den vigtigste er, at vi således kan slippe for indices, den anden er, at vi på den måde overholder en gammel vane.

Vi skal senere se, at det undertiden kan være lettere at opstille udtryk for forskydningsspændingen på den flade, der er vinkelret på den, hvis forskydningsspænding vi i virkeligheden hellere ville have fundet, hvorefter vi kan udnytte en symmetri af tilsvarende karakter som (6.4c).

6.2.2 Aksial og Transversal Ligevægt

Vi ønsker at finde forskydningsspændingerne over bjælketræsnittet, se Fig. 6-2.3. Først bemærkes, at på grund af symmetrien i forskydningsspændingerne, må disse være lig med nul på bjælkens øvre og nedre overflader, hvilket antyder, at det er berettiget at skitsere deres fordeling som parabellignende, som antydnet på figuren.⁹ Fra tidligere, se (5.39), ved vi, at aksialspændingerne fordeler sig som trapezer. På figuren er også angivet den resulterende aksial- og transversallast

Aksial og
transversal
ligevægt

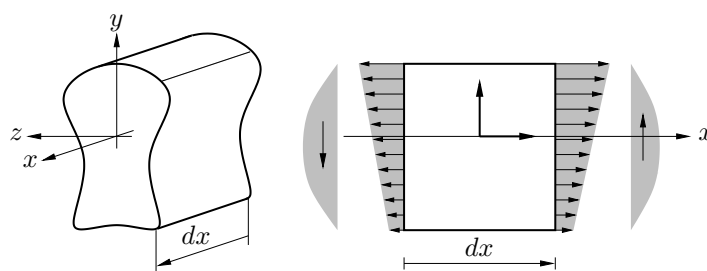


Fig. 6-2.3: Infinitesimale bjælkeelement med angivelse af spændinger og belastninger.

på det infinitesimale bjælkeelement.

Det vil vise sig, at vejen frem består i at opstille ligevægt efter x -aksen for den svættede del af bjælken, se Fig. 6-2.4 og Fig. 6-2.5. Først skal vi dog udnytte en formel fra afsnit 5.1.11, nemlig (5.40), som gengives her:

$$\sigma = \frac{N}{A} - y \frac{M}{I} \quad (6.5)$$

idet vi skriver σ i stedet for σ_f .

⁹For god ordens skyld bemærkes, at vi på nuværende stade ikke kan udelukke, at forskydningsspændingen er nul mellem bjælkens over- og underside. Skulle den imidlertid ligne en trediegrads parabel, ville den ikke kunne bære nogen last i y -retningen, hvilket ret klart antyder, at den skitserede fordeling må være rimelig.

Differentiation med hensyn til x giver herefter:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{dN}{A} - y \frac{dM}{I} = \frac{N'}{A} dx - y \frac{M'}{I} dx \\ d\sigma &= \frac{N'}{A} dx + y \frac{V}{I} dx \end{aligned} \quad (6.6)$$

hvor mærke $()'$ betegner afledet med hensyn til x , og hvor (2.24) også er udnyttet.

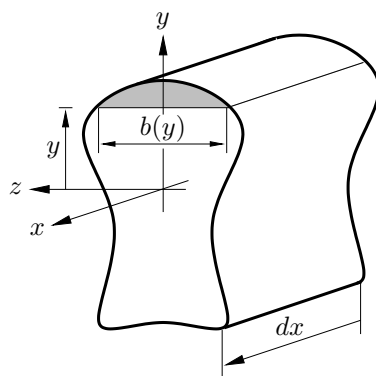


Fig. 6-2.4: Bjælkeestykke med sværtet øvre del.

Inden vi kan opstille ligevægt for den øverste del af det infinitesimale bjælkeelement, er vi nødt til at overveje, hvorledes eventuelle bjælkebelastninger \bar{n} , se Fig. 1-2.4, og \bar{p} , se Fig. 1-3.11, er fordelt over tværsnittet, hvor det i øvrigt vil vise sig, at fordelingen af \bar{n} er særlig vigtig for de følgende udledninger. I den

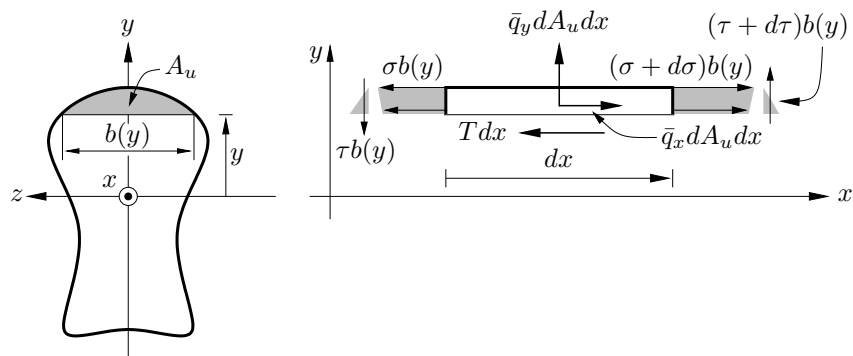


Fig. 6-2.5: Bjælketværsnit og løsskåret øvre del af infinitesimalt bjælkeelement.

endimensionale bjælke-teori har vi — uden at vi diskuterede dette under opstil-

lingen af den — forudsat, at alle belastninger (og snitkræfter) virker i tyngdepunktslinien, idet det for de endimensionale bjælker er det eneste naturlige valg af bjælkeakse. Nu har vi pålagt Bernoulli-Euler bjælkerne nogle ganske strenge kinematiske betingelser, hvilket naturnødvendigt får konsekvenser med hensyn til deres statiske forhold. Eftersom vi har udelukket, at bjælketværsnittene deformerer sig i deres egen plan, kan \bar{n} kun fordeles helt jævnt over tværsnittet. Vi kan derfor konkludere, at intensiteten \bar{q}_x , se Fig. 6-2.5, af \bar{n} er konstant, og at dens resultant skal ligge i tværsnittets tyngdepunkt.

Vandret ligevægt af den løsskårne del af bjælken, se Fig. 6-2.5, fordrer:

$$0 = -Tdx + \int_{A_u} (\sigma + d\sigma)dA - \int_{A_u} \sigma dA + \left(\int_{A_u} \bar{q}_x dA \right) dx \quad (6.7)$$

eller, når (6.6) indføres:

$$0 = -Tdx + \left(\int_{A_u} \left(\frac{N'}{A} + y \frac{V}{I} \right) dA \right) dx + \left(\int_{A_u} \bar{q}_x dA \right) dx \quad (6.8)$$

dvs.

$$T = \frac{N'}{A} \int_{A_u} dA + \frac{V}{I} \int_{A_u} y dA + \bar{q} \int_{A_u} dA \quad (6.9)$$

Da:

$$\bar{n} = A\bar{q}_x \quad (6.10)$$

får vi:

$$T = \frac{A_u}{A} N' + \frac{S_u}{I} V + \frac{A_u}{A} \bar{n} \quad (6.11)$$

hvor definitionen af S_u , se (5.19b), er indført. Endvidere har vi ifølge (1.8b):

$$N' + \bar{n} = 0 \quad (6.12)$$

hvorfor (6.11) giver:

$$T = \frac{S_u}{I} V \quad (6.13)$$

6.2.3 Momentligevægt

Vi har nu udnyttet den vandrette ligevægt og har derfor kun to andre ligevægtsligninger tilbage. Hvorvidt vi skal vælge lodret ligevægt eller momentligevægt, er nok ikke umiddelbart indlysende, men imod anvendelse af den lodrette ligevægt taler, at vi i så fald er nødt til at beskæftige os med fordelingen over tværsnittene af den lodrette last \bar{p} , hvilket faktisk er meget nøje knyttet til forskydningspændingens fordeling, som netop er vort egentlige mål her. Altså vil vi opstille en

Momentligevægt

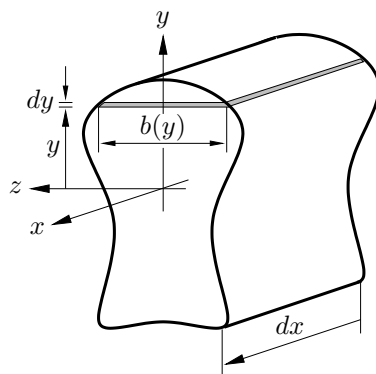


Fig. 6-2.6: Bjælkeestykke med en “fiber.”

momentligevægt. Vi vil betragte ligevægten af en infinitesimal del af en “fiber” i afstanden y fra tyngdepunktslinien, se Fig. 6-2.6 og Fig. 6-2.7.

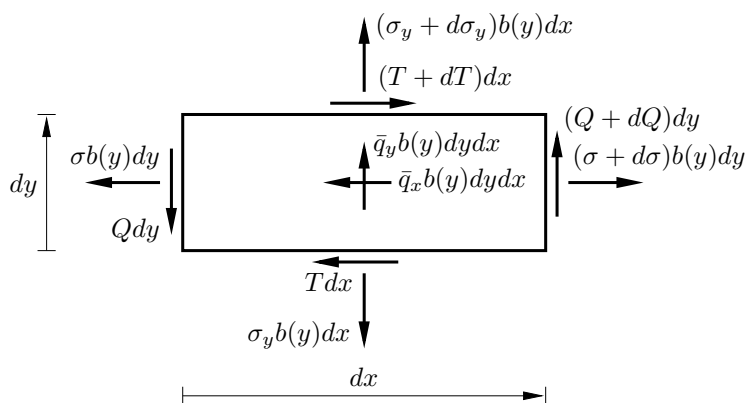


Fig. 6-2.7: Infinitesimale bjælkeestykke.

Vi opstiller momentligevægt, regnet positivt mod uret, om midtpunktet af elementet vist på Fig. 6-2.7:

$$0 = +\frac{1}{2}dxQdy + \frac{1}{2}dx(Q + dQ)dy - \frac{1}{2}dyTdx - \frac{1}{2}dy(T + dt)dx \quad (6.14)$$

Når vi bortkaster led af højeste grad i de infinitesimale størrelser, kan vi konkludere, at:

$$Q = T = \frac{S_u}{I}V \quad (6.15)$$

dvs., at forskydningsspændingen τ i y -retningen bliver:

$$\tau(y) = \frac{V}{I} \frac{S_u}{b(y)} \quad (6.16)$$

Denne formel benævnes ofte *Grashofs formel*.

Grashofs formel

Heraf ses, at forskydningsspændingen i overensstemmelse med vore overvejelser i afsnit 6.2.2 er nul på overfladerne.

Egentlig er det ret heldigt, at forskydningsspændingen er nul, hvor aksialspændingen har maksimum og omvendt, idet de fleste brudkriterier populært sagt på en eller anden måde vægter disse to spændinger sammen og sammenligner resultatet med en brudstyrke.

6.2.4 Eksempler på Beregning af Forskydningsspændinger

Som vi gjorde det vedrørende bestemmelse af de forskellige ordens momenter for lineærelastiske tværsnit, se afsnit 5.1.12, vil vi også her først behandle det rektangulære tværsnit.

Ex 6-1 Rektangulært Bjælketværsnit

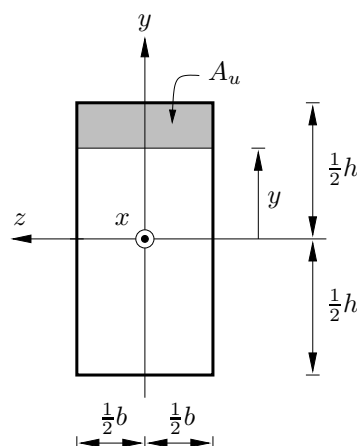


Fig. Ex. 6-1.1: Rektangulært bjælketværsnit.

For det rektangulære bjælketværsnit, se Fig. Ex. 6-1.1, finder vi det statiske moment S_u af det sværtede areal A_u :

$$S_u = \int_{A_u} y dA = \int_y^{h/2} \eta b d\eta = \frac{1}{2} b \left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right) \quad (\text{Ex. 6-1.1})$$

Ved benyttelse af formelen (Ex. 5-1.4) for rektanglets inertimoment samt (6.16) findes nu:

$$\tau(y) = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{y}{h/2} \right)^2 \right) \frac{V}{A} \quad (\text{Ex. 6-1.2})$$

hvor A betegner rektanglets areal.

Den maksimale forskydningsspænding optræder klart for $y = 0$, dvs. i tyngdepunktslinien:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \quad (\text{Ex. 6-1.3})$$

som viser, at den maksimale forskydningsspænding er halvanden gang den gennemsnitlige forskydningsspænding.

Man bør også sikre sig, at resultanten af forskydningsspændingen er lig med forskydningskraften V . I dette tilfælde vil dette være overladt til læseren. Hvis læseren imidlertid er bekendt med den kendsgerning, at arealet under en parabel er lig med to trediedele af grundlinien multipliceret med den maksimale ordinat, vil vedkommende kunne klare problemet uden megen beregning.

Ex 6-2 Cirkulært Bjælketværsnit

Udregningerne bliver en smule mere komplicerede for det cirkulære bjælketværsnit, se Fig. Ex. 6-2.1, end for det rektangulære, idet vi, som vi gjorde det ved bestemmelsen af de forskellige ordens momenter for cirklen, se afsnit Ex 5-2, benytter vinkler som variable. Her er:

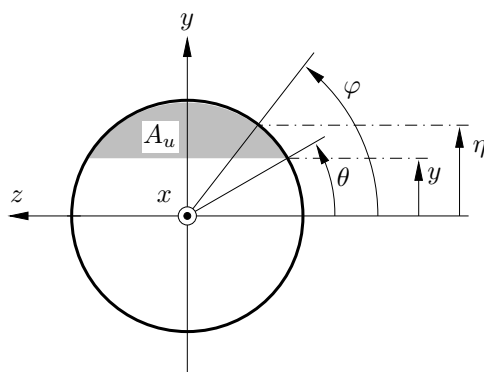


Fig. Ex. 6-2.1: Cirkulært bjælketværsnit.

$$S_u = \int_{A_u} \eta dA \quad (\text{Ex. 6-2.1})$$

hvor vi ved udskiftning af y med η og θ med φ i (Ex. 5-2.1) umiddelbart kan finde:

$$\eta = R \sin \varphi$$

$$d\eta = R \cos \varphi d\varphi \quad (\text{Ex. 6-2.2})$$

$$dA = (2R \cos \varphi) d\varphi = 2R^2 \cos^2 \varphi d\varphi$$

dvs.

$$S_u = \int_0^{\pi/2} 2R^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \quad (\text{Ex. 6-2.3})$$

Hvorledes man udfører integrationen, er noget af en smagssag, idet man enten kan gøre det i hånden eller overlade det til et af de efterhånden mange programmer til analytisk manipulation af formler. For træningens skyld gør vi det her i hånden, men bemærker, at resultaterne er kontrolleret ved brug af MuPAD.

Vi indfører hjælpevariablen ζ ved:

$$\zeta \equiv \cos \varphi \quad d\zeta = -\sin \varphi d\varphi \quad (\text{Ex. 6-2.4})$$

hvor vi konstaterer, at:

$$\begin{aligned} \varphi = \theta &\implies \zeta = \cos \theta \\ \varphi = \frac{\pi}{2} &\implies \zeta = 0 \end{aligned} \quad (\text{Ex. 6-2.5})$$

hvorved:

$$S_u = 2R^3 \int_0^{\cos \theta} \zeta^2 d\zeta = \frac{2}{3} R^3 \cos^3 \theta \quad (\text{Ex. 6-2.6})$$

hvorefter vi ved udnyttelse af (Ex. 5-2.2c) og (6.16) kan finde:

$$\tau = \frac{V}{I} \frac{S_u}{b(\theta)} = \frac{4V}{3\pi R^2} \cos^2 \theta \quad (\text{Ex. 6-2.7})$$

dvs., at maksimum af τ er:

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3\pi} \frac{V}{R^2} = \frac{4}{3} \frac{V}{A} \quad (\text{Ex. 6-2.8})$$

Den maksimale værdi af forskydningsspændingen er derfor ca. 33% højere end den gennemsnitlige værdi, hvilket er en lavere forøgelse end for rektanglet, hvor forøgelsen er 50%.

Til nogle formål er det mere bekvemt at udtrykke τ ved y i stedet for ved θ :

$$\tau = \frac{4V}{3\pi R^2} \cos^2(\sin^{-1}(y/R)) = \frac{4V}{3\pi R^2} \left(1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2\right) \quad (\text{Ex. 6-2.9})$$

Visse regnefejl kan opdages, hvis integralet over cirklen af det fundne udtryk for τ ikke giver V . Også her vil vi overlade denne opgave til læseren med en bemærkning om, at integrationen med hensyn til θ er en del lettere end med hensyn til y . Integrationerne bør udføres uafhængigt.

Medens de foregående eksempler handlede om massive tværsnit, vil de næste dreje sig om tyndvægede tværsnit. Det vil vise sig, at medens forskydningsspændingerne i massive tværsnit i reglen er ret betydningsløse set ud fra et styrke- og stabilitetsmæssigt synspunkt, gælder dette ikke for de tyndfligede tværsnit, idet forskydningsspændingerne her er relativt store, hvorfor de kan medføre brud eller stabilitetssvigt.

Ex 6-3 Tyndfliget I-Formet Bjælketværsnit

I et tyndfliget I-profil optræder relativt store forskydningsspændinger, som vi skal se. Dette skyldes, at det er den tynde krop, der bærer hovedparten af forskydningskraften, medens flangerne stort set ikke deltager i denne kraftoptagelse. Deres opgave er jo også at optage momentpåvirkning.

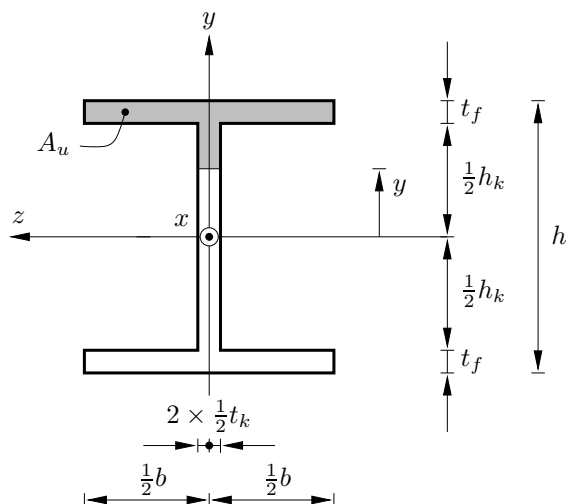


Fig. Ex. 6-3.1: I-formet bjælketværsnit. Beregning af forskydningsspændinger i kroppen.

Ex 6-3.1 Forskydningsspændinger i Kroppen

Vi vil her udnytte nogle af resultaterne fra eksempel Ex 5-1 og eksempel Ex 5-4 samt (6.16). For $|y| < \frac{1}{2}h - t_f$ er der to bidrag til S_u , og vi finder:

$$\begin{aligned} S_u &= \int_y^{h/2} b(\eta) d\eta \\ &= \int_y^{h/2-t_f} \eta t_k d\eta + \int_{h/2-t_f}^{h/2} \eta b d\eta \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}h - t_k \right)^2 t_k - \frac{1}{2} y^2 t_k + \frac{1}{8} h^2 b - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}h - t_k \right)^2 b \end{aligned} \quad (\text{Ex. 6-3.1})$$

Ved at udnytte forudsætningen om tynde flige (Ex. 5-4.1) kan vi finde:

$$\begin{aligned} S_u &\approx \frac{1}{2} t_k \left(\left(\frac{1}{2}h \right)^2 - y^2 \right) + \frac{1}{2} t_f b h \\ &= \frac{1}{8} (1 - \tilde{y}^2) h^2 t_k + \frac{1}{2} b h t_f \end{aligned} \quad (\text{Ex. 6-3.2})$$

hvor

$$\tilde{y} \equiv \frac{y}{h/2} \approx \frac{y}{h_k} \quad (\text{Ex. 6-3.3})$$

Udtrykket for S_u kan også findes uden integration, når man indser, at det statiske moment af et område er lig med områdets areal multipliceret med afstanden til dets tyngdepunkt:

$$S_u = \left(\left(\frac{1}{2} h_k - y \right) t_k \right) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} h_k + y \right) \right) + (b t_f) \left(\frac{1}{2} h_k + \frac{1}{2} t_f \right) \quad (\text{Ex. 6-3.4})$$

hvorefter indsættelse af $h_k = h - 2t_f$ giver (Ex. 6-3.1).

Vi kan benytte de netop fundne resultater sammen med (Ex. 5-4.5) og indsætte dem i (6.16):

$$\tau \approx \frac{3}{2} \frac{1 - \tilde{y}^2 + 4\tilde{A}_f}{1 + 6\tilde{A}_f} \frac{V}{h t_k} \quad (\text{Ex. 6-3.5})$$

hvor et relativt mål for materialemængden i en af flangerne er:

$$\tilde{A}_f \equiv \frac{b t_f}{h t_k} \approx \frac{b t_f}{h_k t_k} \quad (\text{Ex. 6-3.6})$$

Integrerer man den fundne værdi af τ over kroppen, vil man — under hensyntagen til forudsætningen om tynd krop og tynde flanger — finde, at resultatet netop bliver V , hvilket unægtelig er ret beroligende.

Der er tre steder, hvor forskydningsspændingernes størrelse er særlig interessant, nemlig i tyngdepunktet, hvor de er størst samt lig under og lige over overgangen mellem krop og flange. Vi kan benytte de netop fundne resultater sammen med (Ex. 5-4.5) og indsætte dem i (6.16):

$$\begin{aligned} y = 0: \quad \tau = \tau_{\max} &\approx \frac{3}{2} \frac{1 + 4\tilde{A}_f}{1 + 6\tilde{A}_f} \frac{V}{h t_k} \\ y = \frac{1}{2} h_k^-: \quad \tau = \tau^- &\approx \frac{3}{2} \frac{4\tilde{A}_f}{1 + 6\tilde{A}_f} \frac{V}{h t_k} \\ y = \frac{1}{2} h_k^+: \quad \tau = \tau^+ &\approx \frac{3}{2} \frac{4\tilde{A}_f}{1 + 6\tilde{A}_f} \frac{V}{h b} \end{aligned} \quad (\text{Ex. 6-3.7})$$

hvoraf ses, at disse forskydningsspændinger¹⁰ er forsvindende i flangerne.

Lad os antage, at $b \approx h$ og $t_f \approx t_k$. Herved kan vi få en fornemmelse af størrelsesordenen af forskydningsspændingerne:

$$\begin{aligned} y = 0: \quad \tau = \tau_{\max} &\approx \frac{15}{14} \frac{V}{h t_k} = \frac{5}{7} \left(\frac{3}{2} \frac{V}{h t_k} \right) \\ y = \frac{1}{2} h_k^-: \quad \tau = \tau^- &\approx \frac{12}{14} \frac{V}{h t_k} \\ y = \frac{1}{2} h_k^+: \quad \tau = \tau^+ &\approx \frac{12}{14} \frac{V}{h t_k} \frac{t_k}{b} \approx 0 \end{aligned} \quad (\text{Ex. 6-3.8})$$

hvor faktoren $5/7$ i (Ex. 6-3.8a) angiver, hvor meget den maksimale forskydningsspænding er reduceret i forhold til værdien for et rektangel med samme mål som kroppen, se afsnit Ex 6-1.

¹⁰Grunden til at skrive "disse forskydningsspændinger" er, at der — som vi skal se senere — i flangerne forekommer forskydningsspændinger i z -retningen.

Som man ser, er kroppen ganske effektiv til at optage forskydningsspændingerne, idet de kun varierer lidt mellem tyngdepunktet og flangeundersiden, hvilket kan være overraskende, når man sammenligner med variationen i et rektangel, se afsnit Ex 6-1, hvor forskydningsspændingen i over- og underside er nul. Denne forskel må altså skyldes tilstedeværelsen af flangerne, skønt deres primære opgave er at øge stivhed og styrke over for bøjningspåvirkninger.

Ex 6-3.2 Forskydningsspændinger i Flangerne

Hele spændingsbilledet i et I-tværsnit er meget mere kompliceret end i for eksempel et rektangel. Alene detaljerne omkring de indadgående hjørner, hvad enten de er rundede eller ej, kan ikke beskrives tilfredsstillende ved de teorier, vi opstiller i denne bog. Det synes på forhånd klart, at der må optræde store tøjningsgradienter i skillefladen mellem krop og flange, hvor

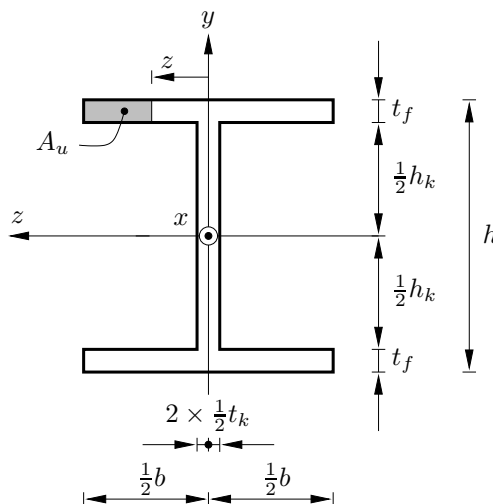


Fig. Ex. 6-3.2: I-formet bjælketværsnit. Beregning af forskydningsspændinger i flangerne.

kroppens forskydningsspænding skal afleveres til flangen, hvorefter den skal spredes ud over flangen. En anden effekt består i, at der i flangerne optræder forskydningsspændinger i z -retningen.

I afsnit 6.2 forudsattes det under udledningerne, at snittene var parallelle med z -aksen, men her skal vi altså benytte resultater, der gælder for snit parallelle med y -aksen. Hvis man gennemgår de omtalte udledninger, vil man konstatere, at der i afsnit 6.2.2 først behandles ligevægt af den øvre del af et tværsnit, se Fig. 6-2.4, hvor skillelinien mellem den øvre del af tværsnittet og resten ikke nødvendigvis er parallel med z -aksen. Derefter betragtedes ligevægt af et infinitesimalt bjælkestykke, se Fig. 6-2.7, hvor det konstateredes, at lasten pr. arealenhed på den øvre del i y -retningen var den samme som lasten pr. arealenhed på snittet parallelt med z -aksen.

Udledningerne forudsatte, at forskydningsspændingerne var konstante i z -retningen, hvilket i nærværende sammenhæng betyder, at de antages ikke at variere i y -retningen, hvilket er en lige så rimelig forudsætning. Ellers kan udledningerne gennemføres helt analogt med det resultat, at (6.16), idet y byttes ud med z :

$$\tau(z) = \frac{V}{I} \frac{S_u}{b(z)} \quad (\text{Ex. 6-3.9})$$

for forskydningsspændingen stadig gælder. Det statiske moment S_u skal stadig beregnes med hensyn til z -aksen:

$$S_u = \frac{1}{2}(h_k + t_f) \left(\left(\frac{1}{2}b - z \right) t_f \right) \quad (\text{Ex. 6-3.10})$$

hvorved

$$\tau(z) = 3 \frac{\tilde{b}(1 - \tilde{z})}{1 + 6\tilde{A}_f} \frac{V}{ht_k}, \quad z \geq 0 \quad (\text{Ex. 6-3.11})$$

hvor

$$\tilde{z} \equiv \frac{z}{b/2} \quad (\text{Ex. 6-3.12})$$

og

$$\tilde{b} \equiv \frac{b}{h} \quad (\text{Ex. 6-3.13})$$

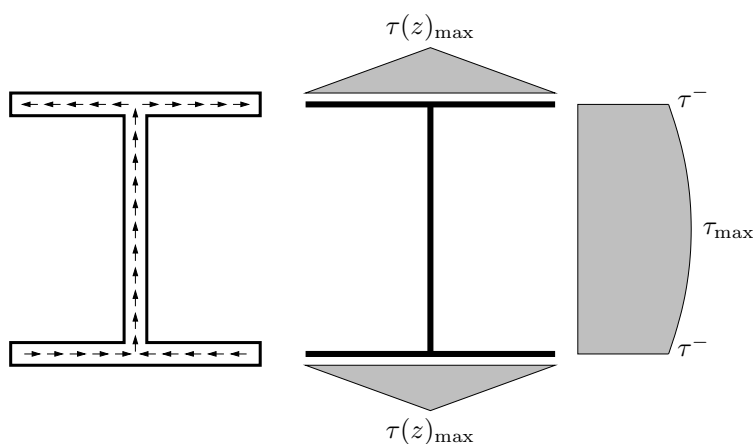


Fig. Ex. 6-3.3: I-formet bjælketværsnit. Skitse af forskydningsspændinger i krop og flanger.

Maksimalværdien $\tau(z)_{\max}$ af $\tau(z)$ optræder ved kroppen, dvs. for $z = 0$:

$$\tau(z)_{\max} = 3 \frac{\tilde{b}}{1 + 6\tilde{A}_f} \frac{V}{ht_k} \quad (\text{Ex. 6-3.14})$$

At denne værdi ikke er negligeabel, ses af, at forholdet mellem $\tau(z)_{\max}$ og τ^- er:

$$\frac{\tau(z)_{\max}}{\tau^-} = \frac{t_k}{2t_f} \quad (\text{Ex. 6-3.15})$$

Fig. Ex. 6-3.3 viser en skitse af forskydningsspændingerne i et I-profil.

Ex 6-4 Rørformet, Cirkulært Bjælketværsnit

Vi vil her beregne de forskydningsspændinger, der er vinkelrette på radierne, se Fig. Ex. 6-4.1, hvor det specifikt er forskydningsspændingerne vinkelret på radien, der ligger under vinklen θ med den negative z -akse, vi vil bestemme.

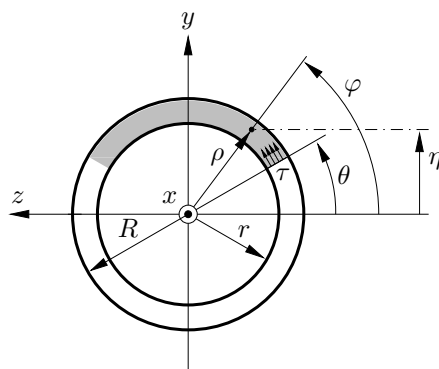


Fig. Ex. 6-4.1: Rørformet cirkulært bjælketværsnit.

Vi kan her benytte argumenter som dem, der i afsnit Ex 6-3.2 benyttedes i forbindelse med udledningen af formelen (Ex. 6-3.11) for forskydningsspændingen $\tau(z)$ i flangen. Vi vil her antage, at forskydningsspændingerne ikke varierer med radien, og at de står vinkelret på radien. Atter har vi, at formelen (6.16):

$$\tau(y) = \frac{V}{I} \frac{S_u}{b(y)} \quad (\text{Ex. 6-4.1})$$

for forskydningsspændingen τ gælder.

Vi skal derfor bestemme det statiske moment S_u af det skyggede areal samt tolke betydningen af bredden, der tidligere kaldtes $b(y)$. Fra afsnit Ex 5-5 har vi formelen (Ex. 5-5.1):

$$I = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) \quad (\text{Ex. 6-4.2})$$

Til bestemmelse af det statiske moment S_u skal vi kende arealelementet dA . Med de på Fig. Ex. 6-4.1 angivne betegnelser er:

$$dA = \rho d\varphi d\rho \quad (\text{Ex. 6-4.3})$$

og ordinaten η bliver:

$$\eta = \rho \sin \varphi \quad (\text{Ex. 6-4.4})$$

dvs.

$$\begin{aligned} S_u &= \int_{A_u} \eta dA = \int_{\theta}^{\pi-\theta} \int_r^R (\rho \sin \varphi) (\rho d\varphi d\rho) \\ &= \int_{\theta}^{\pi-\theta} \sin \varphi d\varphi \int_r^R \rho^2 d\rho \end{aligned} \quad (\text{Ex. 6-4.5})$$

hvorved:

$$S_u = \frac{1}{3} (R^3 - r^3) \cos \theta \quad (\text{Ex. 6-4.6})$$

I stedet for tykkelsen, der tidligere kaldtes $b(y)$, skal vi indføre rørets vægtykkelse t , hvor:

$$b(y) \sim t = R - r \quad (\text{Ex. 6-4.7})$$

hvorved

$$\tau = \frac{4}{3\pi} \frac{(R^3 - r^3)}{(R^4 - r^4)} \frac{1}{(R - r)} \cos(\theta) V \quad (\text{Ex. 6-4.8})$$

som efter en elementær omskrivning giver:

$$\tau = \frac{4}{3\pi} \frac{(R^2 + Rr + r^2)}{(R^4 - r^4)} \cos(\theta) V \quad (\text{Ex. 6-4.9})$$

Arealet A af rørvæggen:

$$A = \pi(R^2 - r^2) \quad (\text{Ex. 6-4.10})$$

kan benyttes til at omskrive (Ex. 6-4.9):

$$\tau = \frac{4}{3} \frac{(R^2 + Rr + r^2)}{(R^2 + r^2)} \cos(\theta) \frac{V}{A} \quad (\text{Ex. 6-4.11})$$

Som det fremgår af (Ex. 6-4.9) og (Ex. 6-4.11), optræder de maksimale forskydningsspændinger τ_{\max} for $\theta = 0$, dvs. ved z -aksen, hvilket vel synes ret indlysende:

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{(R^2 + Rr + r^2)}{(R^2 + r^2)} \frac{V}{A} \quad (\text{Ex. 6-4.12})$$

Hvis rørets tværsnit optog forskydningskraften ved en konstant forskydningsspænding $\tau_{\text{jævn}}$, hvor:

$$\tau_{\text{jævn}} = \frac{V}{A} \quad (\text{Ex. 6-4.13})$$

ser vi, at den maksimale forskydningsspænding τ_{\max} er en faktor k større end den jævnt fordelte, hvor:

$$k = \frac{4}{3} \frac{(R^2 + Rr + r^2)}{(R^2 + r^2)} \longrightarrow 2 \text{ for } r \longrightarrow R \quad (\text{Ex. 6-4.14})$$

Den største forøgelse af den maksimale forskydningsspænding i forhold til den jævnt fordelte optræder netop for $r \rightarrow R$.

Indføres vægtykkelsen $t = R - r$ i (Ex. 6-4.12), og rækkeudvikles med hensyn til t , findes:

$$\tau_{\max} \approx 2 \left(1 - \frac{1}{6} \left(\frac{t}{R} \right)^2 \right) \frac{V}{A} + O((t/R)^3) \quad (\text{Ex. 6-4.15})$$

som også viser, at k er størst for $t \rightarrow 0$.

Kapitel 7

Plastiske Tværsnit

7.1 Materialet

Ved analyser af bærende konstruktioner er det altid nødvendigt at foretage forenklinger af de fysiske (konstitutive) betingelser, så man får en materialemodel, der både er nogenlunde realistisk og beregningsmæssigt bekvem.

7.1.1 Indledende Overvejelser

Ingen materialer er stift-plastiske, medens nogle med rimelig tilnærmelse kan siges at være lineærelastisk-idealplastiske, se Fig. 7-1.1. Hvis vi ud over dette,

Ingen stift-plastiske materialer, men alligevel

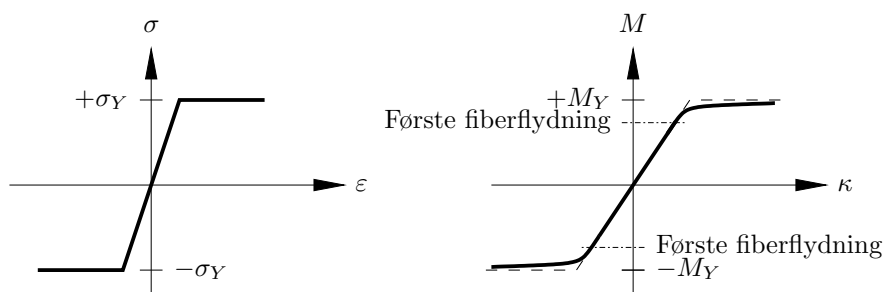


Fig. 7-1.1: Arbejdslinien for “fibrene” og et bjælketværsnit af et lineærelastisk-idealplastisk materiale, hvis positive og negative flydespændinger numerisk set er lige store.

se den venstre delfigur af Fig. 7-1.1, forudsætter Bernoulli-Euler hypotesen om plane tværsnit, der forbliver plane og vinkelrette på bjælkeaksen efter en deformation, vil moment-krumningstøjningsrelationen for et rektangulært tværsnit se nogenlunde ud som vist til højre på Fig. 7-1.1. Under antagelsen om at aksialkræfterne er meget begrænsede i størrelse, vil vi med god tilnærmelse kunne benytte den forenklede moment-krumningstøjningsrelation, der er vist på

Forenklet moment-krumningstøjningsrelation

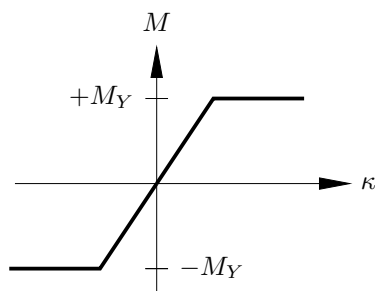


Fig. 7-1.2: Tilnærmet moment-krumningstøjningsrelation for et tværsnit bestående af lineærelastisk-idealplastiske “fibre,” som har samme flydespænding i træk og tryk.

Fig. 7-1.2. Senere vil vi benytte en yderligere forenklet moment-krumningstøjningsrelation, nemlig den stift-idealplastiske, der er vist på Fig. 7-1.3.

7.1.2 Stift-Idealplastisk Materiale

Begrundelsen for anvendelse af denne meget enkle moment-krumningstøjningsrelation er, at *flydelasten*,¹ som også kaldes *grænselasten* (på engelsk: *limit load*),

Stift-idealplastisk materiale

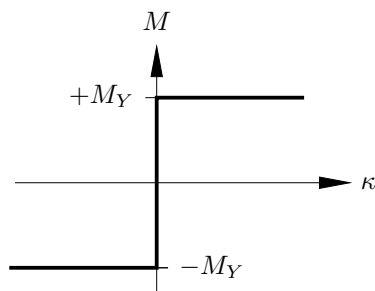


Fig. 7-1.3: Moment-krumningstøjningsrelation for et tværsnit bestående af stift-idealplastiske “fibre” med samme træk- og trykflydespænding.

Flydelast

af en bjælke eller en ramme af et lineærelastisk-idealplastisk materiale i overensstemmelse med Fig. 7-1.2, som vi skal se senere, viser sig at være den samme som den, der findes ved antagelse af moment-krumningstøjningsrelationen fra Fig. 7-1.3.

Flydemoment M_Y

Hvad enten man benytter den ene eller den anden af de ovenfor omtalte materialemodeller, er flydemomentet M_Y , som generelt set er forskelligt for positive og negative krumningstøjninger, en materialeparameter. Når flydemomenterne

¹Flydelasten er den last, der bevirker, at bjælken eller rammen bliver bevægelig og derfor er den største last, konstruktionen kan bære.

er forskellige, betegnes de $M_Y^{(+)}$ for positive henholdsvis $M_Y^{(-)}$ for negative krumningstøjninger, hvor såvel $M_Y^{(-)}$ som $M_Y^{(+)}$ betegner *numeriske værdier*.

7.2 Flydeled og Virtuelt Arbejde

Når momentet har antaget flydeværdien, enten $M_Y^{(+)}$ eller $M_Y^{(-)}$, er der dannet et *flydeled*, som kan opfattes som et almindeligt charnier,² men med den forskel, at det under videre belastning præsterer et bøjningsmoment, der er lig med flydemomentet. Ved benyttelse af de virtuelle flytningers princip skal der således medtages et indre virtuelt arbejde i de enkelte flydeled, se senere. Af hensyn til dette brug, vil vi undersøge det virtuelle arbejde i et flydeled. Det kan være

Flydeled

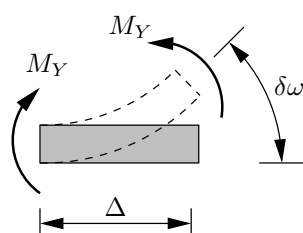


Fig. 7-2.4: Et lille bjælkestykke udsat for flydemomentet M_Y .

instruktivt at betragte et lille bjælkestykke af længde Δ udsat for flydemomentet M_Y , se Fig. 7-2.4. Den højre ende underkastes en virtuel rotation $\delta\omega$ i forhold til den venstre ende, hvor vi har valgt, at $\delta\omega$ går i samme retning som momentet på højre ende, dvs. *i samme retning som den virkelige rotation ω* , der er fremkaldt af M_Y .

Når den gensidige virtuelle rotation af højre ende i forhold til venstre ende er $\delta\omega$, er det ydre virtuelle arbejde δA_y :

$$\delta A_y = M_Y \delta\omega > 0 \quad (7.1)$$

og det indre virtuelle arbejde δA_i :

$$\delta A_i = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\int_0^\Delta M(s) \delta\kappa ds \right) = M \delta\omega \quad (7.2)$$

hvor bøjningskrumningen som sædvanligt er betegnet κ . Da det ydre virtuelle arbejde er større end 0, er det indre virtuelle arbejde det også.

Hvis vi ikke alene koncentrerer vor opmærksomhed om selve flydeledet, men også inddrager de tilstødende bjælker, bliver situationen noget mere kompliceret, se Fig. 7-2.5. Nu burde der tegnes 4 momenter som vist på figures venstre del. Vi kan her benytte et kneb, der består i kun at tegne de to momenter, der angriber

²Fra fransk *charnière*. På dansk benyttes både *charnier* og *charniere* — som det ses, den sidste udgave sædvanligvis uden accent grave på dansk.

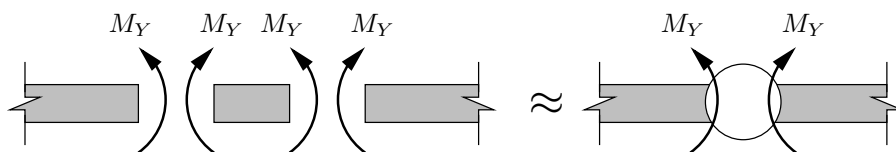


Fig. 7-2.5: Flydeled og tilstødende bjælker.

de tilstødende bjælker, se figurens højre del, og udelade de to momenter, der reelt påføres flydeleddet. Dette medfører tilsyneladende en komplikation, idet vi nu skal regne flydemoment og gensidig rotation med modsat fortegn for at få den korrekte værdi af det indre virtuelle arbejde i flydeleddet. Når komplikationen kan betegnes som tilsyneladende, skyldes det, at med et virtuelt flytningsfelt,

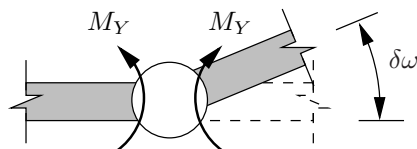


Fig. 7-2.6: Moment-krumningstøjningsrelation for et tværsnit bestående af stift-idealplastiske “fibre” med samme træk- og trykflydespænding.

der i et flydeled medfører en gensidig rotation, der har samme fortegn som den reelle gensidige rotation, er det indre virtuelle arbejde i flydeleddet altid positivt, se også Fig. 7-2.6.

Litteratur

Byskov, E. (2002a). *Elementary Continuum Mechanics for Everyone—and Some More. “I need it like I need another hole in my head”*. Vol. 1. Department of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University, Aalborg, Denmark. ISSN 1395-8232 U0207.

Byskov, E. (2002b). *Elementary Continuum Mechanics for Everyone—and Some More. “I need it like I need another hole in my head”*. Vol. 2. Department of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University, Aalborg, Denmark. ISSN 1395-8232 U0208.

Indeks

A	
Aksial	
Ligevægt	159
Aksialkraft N	18
Aksialkræfter	
Små	78
Aksialstivhed EA	17
Aksialtøjning ε	17, 140
Moderat ulineær	114
Andenordens	
Differentialligning	20
Moment	143
Andenordens moment = Inertimoment	
	143
Arbejdskonjugerede	
Størrelser	54, 60, 66, 71
Arbejdslinie	139
Areal = Nulteordens moment	143

B	
Bernoulli-Euler bjælke	57, 69
Betingelse	
Fysisk	19
Konstitutiv	19
Bjælke	
Bernoulli-Euler	57, 69
Fiber	138
Flytningsdifferentialligning	28
Resumé, konstitutive relationer	
	143, 145
Statisk bestemt	60
Timoshenko	55, 67
Bjælkeakse	144
I tyngdepunktslinie	145
Bjælkefiber	138

Bjælkemekanisme	96
Bjælketværsnit	
Cirkulært	150, 164
Rørformet	154, 170
I-Formet	152, 166
Rektangulært	148, 163
Rørformet	
Cirkulært	154, 170
T-formet	151
Bøjningsmoment M	140
Bøjningsstivhed EI	23

C	
Cirkulært	
Bjælketværsnit	150, 164
Rørformet	154, 170
Tværsnit	150, 164
Rørformet	154, 170

D	
Deformationer	
Små	15
Differentialligning	
Andenordens	20
Fjerdeordens	28
Flytning	122
Stang	19
Statisk	18
Diskontinuiteter	30

E	
Elasticitet	
Lineær	16, 19, 27

Elasticitetskoefficient E	17
Endimensionalt	
Legeme	15
Etagemekanisme	96
Extrema	83

F

Felt	
Muligt	84
Tilladeligt	84
Feltbetingelser	
Tre	19, 27
Feltligning	
Kinematisk	18
Statisk	18
Fiber	
Bjælke	138
Fiberspænding	
Lineær over tværsnittet . . .	148
Fibertøjning	
Lineær over tværsnittet . . .	148
Fjerdeordens	
Differentialligning	28
Flydelastparameter α_Y	79, 82
Flydemekanisme	80, 82, 84
Antaget	87
Korrekt	84
Flytninger	
Infinitesimale	78
Små	15
Flytningsdifferentialligning	122
Bjælke	28
Stang	19
Flytnings-tøjningsrelation	18
Formel	
Grashofs	163
Naviers	148
Forskydningskraft $V(x)$	26
Fysisk	
Betingelse	19
Tolkning	56, 58, 68, 70
Førsteordens	
Moment	142

G

Generaliseret	
Spænding	54, 60, 66, 71
Tøjning	54, 60, 66, 71, 141
Generel	
Løsning	
Søjledifferentialligning . .	126
Gode	
Løsninger	38, 62
Grashofs formel	163
Grundmekanisme	95
Guddommelig	
Indskydelse	157

H

Hjælpestørrelse	
Forskydningskraft	58

I

I-Formet	
Bjælketværsnit	152, 166
Tværsnit	152, 166
Indskydelse	
Guddommelig	157
Inertimoment = Andenordens moment	
.	143
Inertimoment I_{zz}	143
Inertimoment I	144
Infinitesimale	
Flytninger	78

K

Kinematisk	
Linearitet	78
Kinematisk feltligning	18
Knudemekanisme	97
Konstitutiv	
Betingelse	19
Konstitutive relationer for bjælker	
Resumé	143, 145
Kontinuummekanik	157
Krumningstøjning κ	23, 140

Tilnærmet $\kappa \approx w''(x)$	25
<hr/> L <hr/>	
Lastenhed	
Lastenhed \bar{P}	124
Lastparameter	
Flydelastparameter α_Y	79, 82
Lastparameter α	79, 124
Legeme	
Endimensionalt	15
Orienteret	15
Ligevægt	
Aksial	159
Moment	161
Transversal	159
Ligevægtsligninger	123
Ligninger	
Styrende	123
Linearitet	
Kinematisk	78
Lineær	
Elasticitet	16, 19, 27, 137
Lineærelastisk	137
Materiale	19
Lineærelastisk-idealplastisk	
Materiale	78
Længdetøjning ε	17
Løsning	
Generel	
Søjledifferentialligning	126
Løsninger	
Gode	38, 62

<hr/> M <hr/>	
Materiale	
Lineærelastisk	19
Lineærelastisk-idealplastisk	78
Stift-idealplastisk	78
Materialemodel	137
Mekanisme	80, 82, 83
Bjælkemekanisme	96
Etagemekanisme	96
Flydemekanisme	80, 82
Grundmekanisme	95
Knudemekanisme	97

Mekanismekombinationsmetode	98
Moderat ulineær	
Tøjninger	123
Tøjningsvariation	123
Moment	22
Andenordens	143
Førsteordens	142
Nulteordens	142
Resulterende	22
Statisk S_z	143
Moment	
Inerti I	144
Statisk S	144
Momentligevægt	161
Muligt	
Felt	84

<hr/> N <hr/>	
Naviers formel	148
Nedreværdi	84
Nedreværdisætningen	83
Normalkraft N	18, 140
Nullinie	145
Nulteordens	
Moment	142

<hr/> O <hr/>	
Orienteret	
Legeme	15
Overgangsbetingelser	30

<hr/> P <hr/>	
Princip	
Virtuelle	
Flytningers	53, 56, 58
Kræfters	53, 66, 68, 70

<hr/> R <hr/>	
Rektangulært	
Bjælketværsnit	148, 163
Tværsnit	148, 163
Resultater	

Uafhængighed	
Bjælkeakse	145
Resulterende	
Moment	22
Resumé, Konstitutive relationer for bjælker	143, 145

S

Skive	157
Små	
Aksialkræfter	78
Deformationer	15
Flytninger	15
Snitkraftfelt	
Antaget	84
Snitmoment M	23
Stang	
Flytningsdifferentialligning	19
Stangdeformation	16
Statisk	
Bestemt	
Bjælke	60
Differentialligning	18
Feltligning	18
Statisk moment S_z	143
Statisk moment = Førsteordens moment	143
Statisk moment S	144
Stift-idealplastisk	
Materiale	78
Streg over symbol	54
Styrende	
Ligninger	123
Størrelser	
Arbejdskonjugerede	54, 60, 66, 71
Søjledifferentialligning	
Løsning	
Generel	126
Søjleeksempler	124

T

T-formet	
Bjælketværsnit	151
Tværsnit	151
Tilladeligt	

Felt	84
Tilnærmet	
Krumningstøjning $\kappa \approx w''(x)$	25
Timoshenkobjælke	55, 67
Tolkning	
Fysisk	56, 58, 68, 70
Transversal	
Ligevægt	159
Tre	
Feltbetingelser	19, 27
Tværsnit	
Cirkulært	150, 164
Rørformet	154, 170
I-Formet	152, 166
Rektangulært	148, 163
Rørformet	
Cirkulært	154, 170
T-formet	151
Tværsnitsakser	144
Tværsnitsareal A	17, 143, 144
Tyngdepunktsakse	144
Tøjning	
Generaliseret	141
Tøjninger	123
Tøjningsvariation	123

U

Uafhængighed	
Resultater	
Bjælkeakse	145
Ulineær	
Aksialtøjning	114

V

Variation	115
VFP	53, 56, 58, 123
Virtuelle	
Flytningers	
Princip (VFP)	53, 56, 58, 123
Kræfters	
Princip (VKP)	53, 66, 68, 70
VKP	53, 68, 70
Voodoo	157

 \emptyset

Øvreværdi	87
Øvreværdisætningen	83